РОСЖЕЛДОР

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»**

(ФГБОУ ВО РГУПС)

Н.С. Задорожная

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ.
ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону

2025

УДК 51(07) + 06

Рецензент – доктор физико-математических наук, доцент А.В.Сидашов

Задорожная, Н.С.

Математические методы решения прикладных профессиональных задач. Геометрия в пространстве: учебно-методическое пособие / Н.С. Задорожная ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д: РГУПС, 2025. – 52 с.

Учебно-методическое пособие содержит круг вопросов, предполагающих получение необходимых знаний по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» и даны методические рекомендации по изучению основных проблем курса.

В краткой форме приводятся необходимые теоретические сведения по элементарной математике из раздела «Геометрия (Стереометрия)», типовые примеры и задачи с решениями, а также задания для аудиторных и домашних занятий.

Пособие может быть использовано при подготовке к практическим занятиям студентами 2-го курса специальности среднего профессионального образования 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач».

Одобрено к изданию кафедрой «Высшая математика».

Оглавление

Введение

Мы живем в трехмерном пространстве. Почти все предметы, которые нас окружают, обладают высотой, шириной и длиной. Стол, стул, ноутбук, телефон — все эти предметы состоят из геометрических тел. В стереометрии мы изучаем то, что нас окружает.

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» – объемный, пространственный и «метрео» – измерять. Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости. Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать так называемые геометрические тела и их поверхности.

Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются многогранниками. Одним из простейших многогранников является куб. Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого шаром. Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого цилиндром.

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отдельную от остальной части пространства поверхностью – границей этого тела. Так, например, граница шара есть сфера, а граница цилиндра состоит из двух кругов – оснований цилиндра и боковой поверхности. Изучая свойства геометрических фигур – воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

1 Прямые и плоскости в пространстве

1.1. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Прямые могут быть пересекающимися (имеют одну общую точку), параллельными (лежат в одной плоскости и не пересекаются) или скрещивающимися (не лежат в одной плоскости и не пересекаются).

Пересекающиеся прямые — это прямые, которые имеют ровно одну общую точку, или точку пересечения. Они могут быть расположены под различными углами друг к другу.

Совпадающие прямые — это прямые, которые совершенно идентичны и лежат друг на друге. Каждая точка на одной прямой также лежит на другой прямой.

Скрещивающиеся прямые — это две прямые, которые не имеют общих точек, но при этом они также не параллельны. Если бы они лежали в одной плоскости, то они бы пересекались, но в трехмерном пространстве это не так. Скрещивающиеся прямые — один из наиболее часто встречающихся случаев взаимного расположения прямых.

Параллельные прямые. Две прямые параллельны, если они никогда не пересекутся, независимо от того, насколько далеко они будут продлены в обе стороны. Это означает, что они имеют одинаковое направление, но не имеют общих точек.

Поверхность в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, ***сфера*** радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x;y;z)=0$ с тремя переменными *x, y* и *z*, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные *x, y* и *z* в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

1.2. Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения. Рассмотрим некоторые из них.

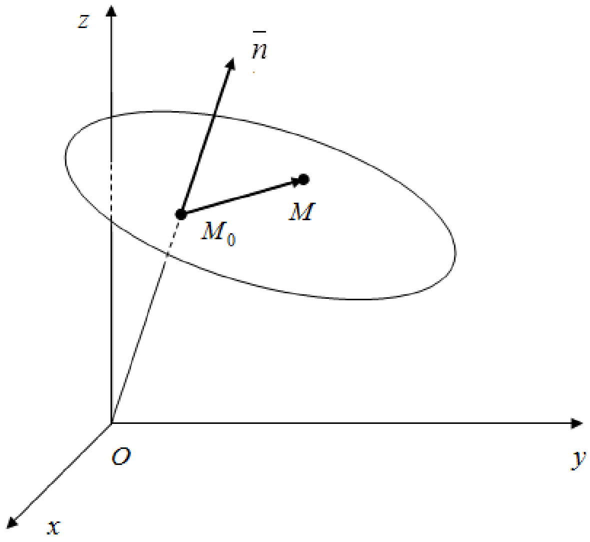
1.2.1. Общее уравнение плоскости

Общим уравнением плоскости называется уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (1)$$

причем по крайней мере один из коэффициентов A, B или C не равен нулю.

Вектор $\overline{n}=(A;B;C)$ называется ***нормальным вектором*** или ***вектором нормали***, плоскости, он перпендикулярен плоскости (1).



<u>Частные случаи общего уравнения плоскости</u>:

1. *Если* $D=0$, то уравнение (1) принимает вид

$$Ax+By+Cz=0.$$

Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае ***плоскость проходит через начало координат***.

2. Если $C=0$, то имеем уравнение $Ax+By+D=0$. Нормальный вектор $\overline{n}=(A;B;0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, ***плоскость параллельна оси*** Oz; если *B = 0* — ***плоскость параллельна оси*** Oy**,** $A=0$ – ***параллельна оси*** Ox **.**

3. Если $C=D=0$, то уравнение плоскости примет вид $Ax+By=0$, в этом случае плоскость ***проходит через ось*** Oz**.** Аналогично, уравнениям $By+Cz=0$ и $Ax+Cz=0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

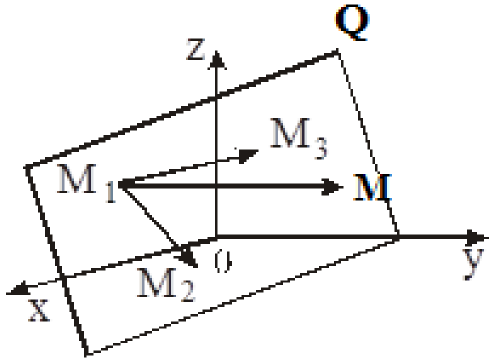
4. Если $A=B=0$, то уравнение (1) принимает вид $Cz+D=0$, т. е. $z=-\dfrac{D}{C}$. Плоскость ***параллельна плоскости*** Oxy**.** Аналогично, уравнениям $Ax+D=0$ и $By+D=0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. Если $A=B=D=0$, то уравнение (1) примет вид $Cz=0$, т. е. $z=0$. Это ***уравнение плоскости*** Oxy**.** Аналогично: $y=0$ — ***уравнение***

плоскости Oxz ; $x=0$ — ***уравнение плоскости*** Oyz .

1.2.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы $\overline{M_1M}=(x-x_1; y-y_1; z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (из аналитической геометрии известно, что в этом случае их смешанное произведение равно нулю), получаем

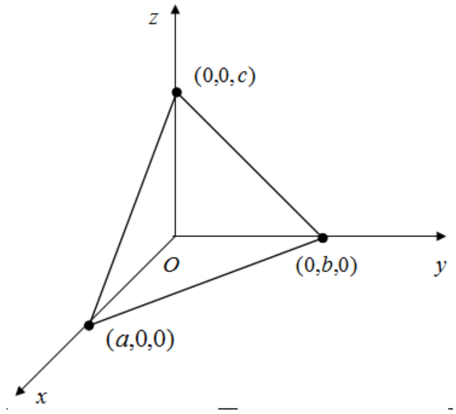
$(\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3})=0$. Смешанное произведение векторов можно вычислить через определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 . \qquad (2)$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получим уравнение плоскости вида (1), т. е. уравнение (2) есть ***уравнение плоскости, проходящей через три данные точки***.

1.2.3. Уравнение плоскости в отрезках на осях

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$.



Подставляя координаты этих точек в уравнение (2), получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

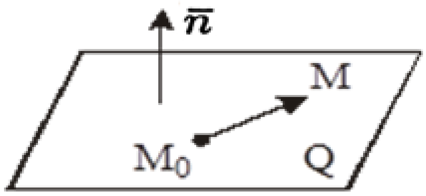
Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \quad . \tag{3}$$

Уравнение (3) называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях***. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

1.2.4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. *A, B, C* – координаты вектора нормали. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$.



Тогда векторы $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\overline{M_0 M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю $\left(\overline{M_0 M}, \bar{n}\right) = 0$. Следовательно, на основании выражения скалярного произведения векторов через их координаты получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

1.3. Основные задачи, использующие уравнения плоскости

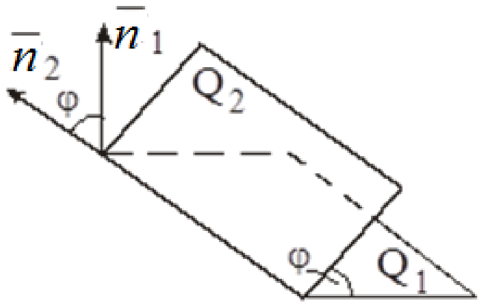
1.3.1. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2 общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ ,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ .$$

Под углом ***между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.



Угол φ между нормальными векторами $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов. Поэтому угол можно найти как угол между нормалями плоскостей по известной формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$$

или

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \ . \qquad (4)$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормали, т. е. $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$ (и наоборот). Но тогда скалярное произведение нормалей равно нулю: $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$, т. е.

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}\,. \tag{5}$$

Полученное равенство есть ***условие перпендикулярности двух плоскостей*** Q_1 и Q_2 **.**

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны, то будут параллельны и их нормали $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}\,. \tag{6}$$

Это и есть ***условие параллельности двух плоскостей*** Q_1 и Q_2 **.**

1.3. 2. Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

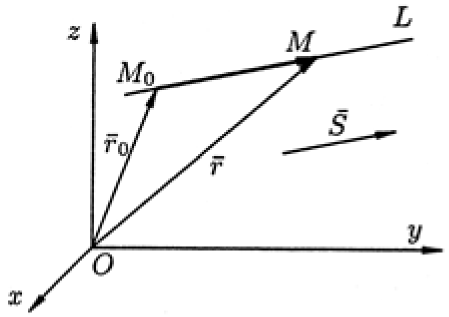
$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}\,. \tag{7}$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$.

2. Уравнения прямой в пространстве

2.1. Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\overline{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\overline{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\overline{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\overline{r_0}$ и $\overline{r}$.



Очевидно, что три вектора $\overline{r_0}$, $\overline{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{M_0M} \ . \qquad (8)$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L , параллелен направляющему вектору $\overline{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\overline{S}$, где t — скалярный множитель, называемый ***параметром***, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой

В результате получим уравнение

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{S} \qquad (9)$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***.

2.2. Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\overline{r} = (x; y; z)$, $\overline{r_0} = (x_0; y_0; z_0)$, $tS = (tm; tn; tp)$, уравнение (9) можно записать в виде

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = (x_0 + tm)\overline{i} + (y_0 + tn)\overline{j} + (z_0 + tp)\overline{k} \ .$$

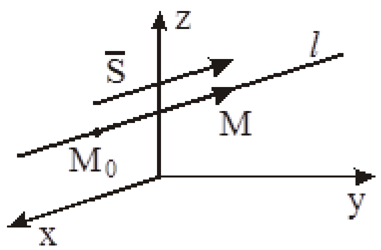
Отсюда следуют равенства:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \ , \\ y = y_0 + nt \ , \\ z = z_0 + pt \ . \end{cases} \qquad (10)$$

Они называются ***параметрическими уравнениями прямой*** в пространстве.

2.3. Каноническое уравнение прямой

Пусть $\overline{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\overline{S}$.



Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\overline{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad . \tag{11}$$

Уравнение (11) называются ***каноническим уравнением прямой*** в пространстве.

<u>Замечания:</u>

1) Уравнения (11) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (10), исключив параметр t . Из уравнений (10) находим

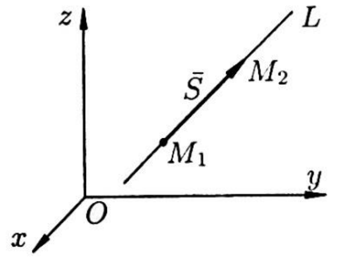
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \quad .$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (11) означает обращение в нуль соответствующей координаты направляющего вектора прямой.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2;-4;1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\overline{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

2.4. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\overline{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\overline{S} = \overline{M_1M_2}$.



Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям (11), уравнение прямой L имеет вид

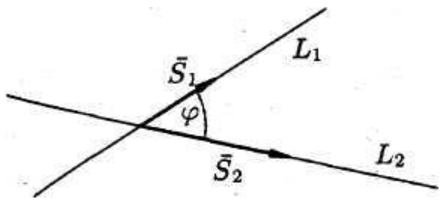
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} . \qquad (12)$$

Уравнения (12) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки***.

2.5. Основные задачи, использующие уравнения прямой в пространстве

2.5.1. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями



$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и $$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} .$$

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $\overline{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$ и $\overline{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$. Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right| \cdot \left|\overline{S_2}\right|} , \quad \text{или}$$

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} . \qquad (13)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (13) следует взять по модулю.

Если прямые L_1 и L_2 ***перпендикулярны***, то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi = 0$. Следовательно, числитель дроби (13) равен нулю, т. е.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad .$$

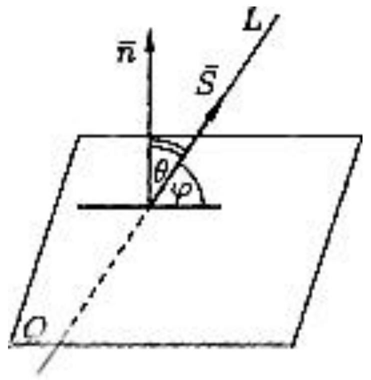
Если прямые L_1 и L_2 ***параллельны***, то параллельны их направляющие векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad .$$

2.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

2.6.1. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.



Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ – угол между векторами $\overline{n_1} = (A; B; C)$ и $\overline{S} = (m; n; p)$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{\overline{n} \cdot \overline{S}}{|\overline{n}| \cdot |\overline{S}|}$. При этом $\sin\varphi = \pm\cos\theta$:

если $\theta \le \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$; если $\theta > \dfrac{\pi}{2}$, то

$\cos\theta = \cos(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$.

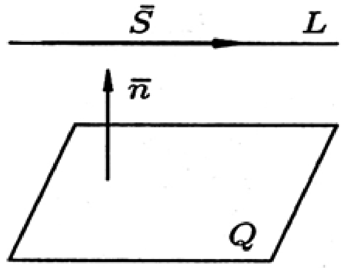
$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad . \qquad (14)$$

Острый угол между плоскостью Q и прямой L можно найти, взяв в формуле (14) модуль правой части.

Если прямая L ***параллельна плоскости*** Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны, а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0 \ . \qquad (15)$$

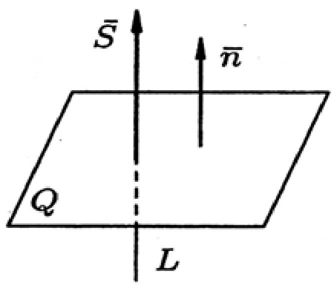
Соотношение (15) является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.



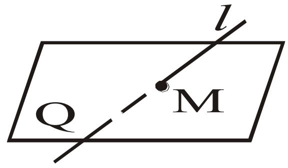
Если прямая L ***перпендикулярна плоскости*** Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны. Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (16)$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.



2.6.2. Точка пересечения прямой и плоскости



Пусть $M(x, y, z)$ – точка пересечения прямой l с плоскостью Q. Для нахождения координаты точки пересечения необходимо совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} & (l) \\ Ax+By+Cz+Д=0 & (Q) \end{cases}$$

Запишем уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = t \\ \dfrac{y-y_0}{n} = t; \\ \dfrac{z-z_0}{p} = t \\ Ax+By+Cz+Д=0 \ \ (Q) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \\ Ax+By+Cz+Д=0 \end{cases}$$

Подставим эти выражения для *x, y, z* в уравнение плоскости и вычислим значение параметра , ***соответствующего точке пересечения***. В результате подстановки этого значения в уравнения прямой в параметрической форме, найдем координаты точки *M*(*x,y,z*).

Пример . Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{5}$ с плоскостью
$x + y - 2z - 4 = 0.$

Решение. Представим уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-t \\ z = 2+5t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-t \\ z = 2+5t \\ x+y-2z-4=0 \end{cases}$$

Подставим выражения для *x, y* и *z* в уравнение плоскости:
$1 + 3t + (-1 - t) - 2(2 + 5t) - 4 = 0.$ Отсюда $t = 1$. Подставляя в параметрические уравнения прямой $t = 1$, получаем

$x = 1 + 3(-1) = -2;$

$y = -1 + 1 = 0;$

$z = 2 + 5(-1) = -3.$

Итак, прямая и плоскость пересекаются в точке *M*(-2, 0, -3).

Пример. Составить уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M(0,-4,5)$, параллельно вектору $\overline{AB}$, если $A(1,-1,0), B(2,0,-1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{AB}=\{1,1,-1\}$. Этот вектор является направляющим вектором искомой прямой. Для составления ее уравнения воспользуемся каноническим уравнением прямой $\frac{x-x_o}{p}=\frac{y-y_o}{q}=\frac{z-z_o}{r}$, где $\{p,q,r\}$ - координаты направляющего вектора прямой. Подставив в это уравнение координаты точки M и направляющего вектора, получим уравнение искомой прямой:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-5}{-1} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-y-4=0, \\ x+z-5=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение определяет прямую в пространстве как линию пересечения двух плоскостей.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,3,4)$ параллельно плоскости $2x+y-z+4=0$ и определить отрезки, которые она отсекает на координатных осях.

Решение. Заданная плоскость имеет вектор нормали $\overline{\mathbf{n}}=\{2,1,-1\}$. Так как искомая плоскость параллельна заданной, она имеет тот же вектор нормали. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через одну точку перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{n}}=\{A,B,C\}$: $A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$.

Подставив в это уравнение координаты заданной точки и нормали, найдем

$$2(x+1)+(y-3)-(z-4)=0 \quad \text{или} \quad 2x+y-z+3=0.$$

Приведем полученное уравнение к виду в отрезках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$: $\frac{2x}{-3}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{3}=1$.

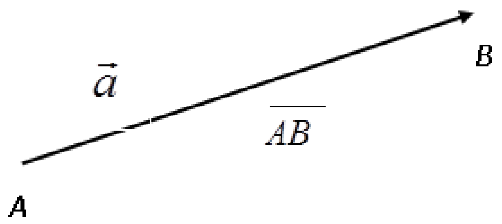
Отсюда находим, что плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки $a=-3/2$, $b=-3$ $c=3$.

3. Координаты и векторы в пространстве

3.1. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются ***скалярными***. Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют ***векторными***. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.



Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A —начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается $-\overline{a}$.

Длиной или ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\overline{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором и обозначается через $\overline{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется ***ортом*** вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^0$.

Орт вектора $\vec{a}$ можно записать в виде

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

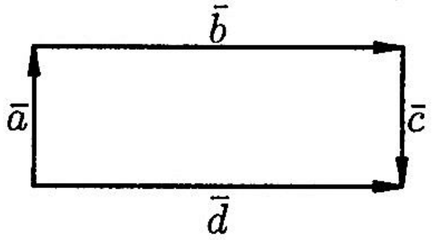
Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными*** ($\overline{a} = \overline{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

На рисунке векторы образуют прямоугольник. Справедливо равенство $\bar{b} = \bar{d}$, но $\bar{a} \neq \bar{c}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ — противоположные, $\bar{a} = -\bar{c}$.

Равные векторы называют также ***свободными***.

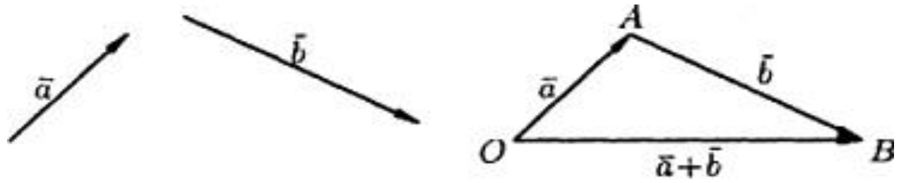


Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

3.2. Линейные операции над векторами

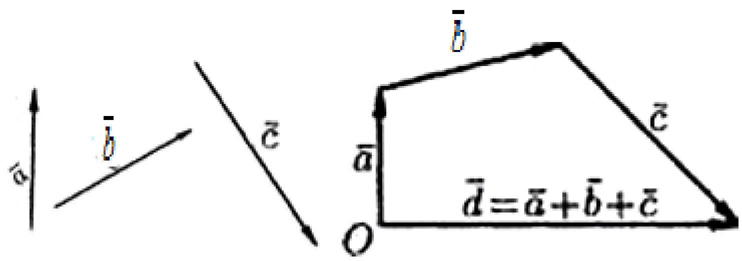
Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется ***суммой*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$.

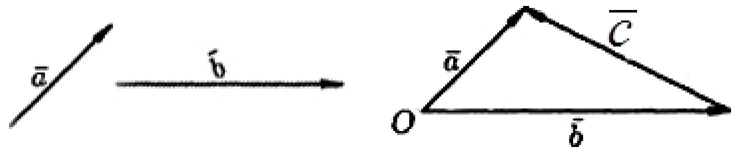


Это правило сложения векторов называют ***правилом треугольника***.

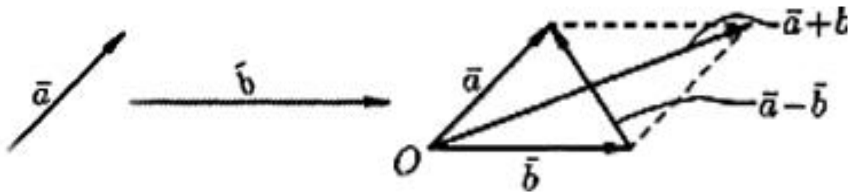
На рисунке показано сложение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.



Под ***разностью*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$.



Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая — разностью.



Можно вычитать векторы по правилу: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$, т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar{a}$ с вектором, противоположным вектору $\bar{b}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ ***на скаляр (число)*** λ называется вектор $\lambda\cdot\bar{a}$ (или $\bar{a}\cdot\lambda$), который имеет длину $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$ и противоположное направление, если λ < 0. Например, если дан вектор $\xrightarrow{\bar{a}}$, то векторы $3\bar{a}$ и $-2\bar{a}$ будут иметь вид

$$\longrightarrow\xrightarrow{3\bar{a}}\longrightarrow \quad \text{и} \quad \xleftarrow{-2\bar{a}}\longleftarrow .$$

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\bar{b}=\lambda\cdot\bar{a}$, то $\bar{b}\parallel\bar{a}$. Наоборот, если $\bar{b}\parallel\bar{a}$, ($\bar{a}\neq\bar{0}$), то при некотором λ верно равенство $\bar{b}=\lambda\bar{a}$;

2) всегда $\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}^{0}$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами подчиняются следующим правилам: для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых чисел α, β выполняются условия:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует такой вектор $-\vec{a}$, называемый ***противоположным***, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;

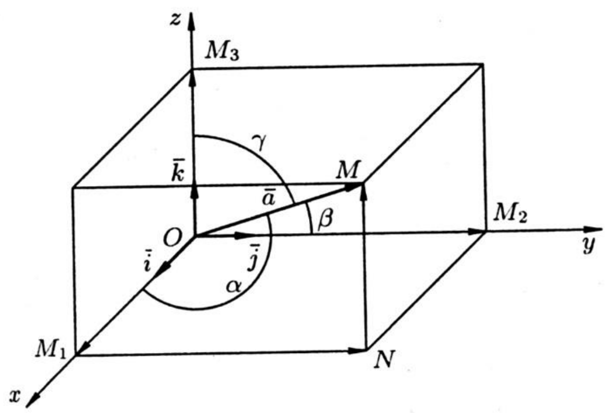
6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;

7) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$;

8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

3.3. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат ***Oxyz***. Выделим на координатных осях ***Ox, Oy*** и ***Oz*** единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно.



Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a}=\overline{OM}$.

Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через ***M₁, M₂*** и ***M₃***. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Найдем проекции вектора на оси координат. Тогда $пр_x\,\bar{a}=\left|\overline{OM}_1\right|$, $пр_y\,\bar{a}=\left|\overline{OM}_2\right|$,

$пр_z\,\bar{a}=\left|\overline{OM}_3\right|$.

По определению суммы нескольких векторов находим

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM} \quad .$$

А так как $\overline{M_1N} = \overline{OM_2}$, $\overline{NM} = \overline{OM_3}$, то

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} \quad . \tag{17}$$

Но $\overline{OM_1} = \left|\overline{OM_1}\right| \cdot \bar{i}$, $\overline{OM_2} = \left|\overline{OM_2}\right| \cdot \bar{j}$, $\overline{OM_3} = \left|\overline{OM_3}\right| \cdot \bar{k}$. (18)

Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси ***Ox***, ***Oy*** и ***Oz*** соответственно через $\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{a_y}$ и $\boldsymbol{a_z}$, т.е. $\left|\overline{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overline{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overline{OM_3}\right| = a_z$. Тогда из равенств (17) и (18) получаем

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \bar{k} \quad . \tag{19}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей***. Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (3) часто записывают в символическом виде:

$$\bar{a} = \left(a_x ; a_y ; a_z\right) .$$

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2$, т. е.

$$\left|\bar{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad . \tag{20}$$

Отсюда

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad ,$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат***.

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями *Ox, Oy* и *Oz* соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\alpha \quad , \quad a_y = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\beta \quad , \quad a_z = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\gamma \tag{21}$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\bar{a}\right|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\bar{a}\right|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\bar{a}\right|} \quad .$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Верно соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице***.

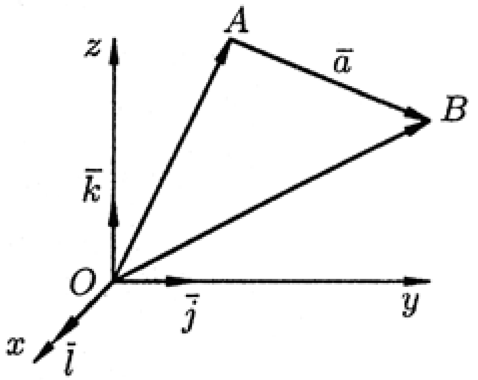
3.4. Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ заданы своими проекциями на оси координат *Ox, Oy, Oz* или, что то же самое,

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}.$$

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$, или кратко

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z).$$



То есть ***при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).***

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$ или короче $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$

То есть ***при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.***

Пример. Найти вектор $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $\vec{a} = \{2; -6; -1\}$, $\vec{b} = \{0; -2; 5\}$.

Решение. $\vec{c} = 3 \cdot \{2; -6; -1\} - 4 \cdot \{0; -2; 5\} =$

$= \{6; -18; -3\} - \{0; -8; 20\} = \{6; -10; -23\}.$

3.5. Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что

два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, т. е.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \end{cases}$$

3.6. Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами.

Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то можно записать $\bar{a} = \lambda \bullet \bar{b}$, где λ — некоторое число. То есть

$$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda\left(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}\right) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}\ .$$

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

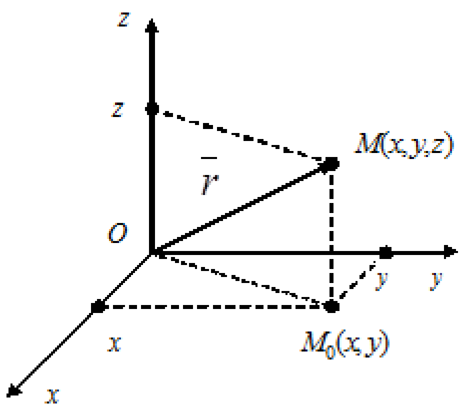
т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\ .$$

Таким образом, **координаты коллинеарных векторов пропорциональны**. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

3.7. Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат ***Oxyz***.



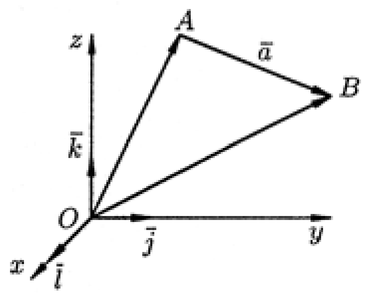
Для любой точки *M* координаты вектора $\overline{OM}$ называются ***координатами точки M***. Вектор $\overline{OM}$ называется ***радиус-вектором*** точки ***M,*** обозначается $\overline{r}$, т. е. $\overline{OM} = \overline{r}$. Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиус-вектора

$$\overline{r} = (x;\ y;\ z) \qquad \text{или} \qquad \overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}\ .$$

Координаты точки *M* записываются в виде $M\ (x;\ y;\ z)$.

3.8. Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, если известны, координаты точек $\boldsymbol{A(x_1;\ y_1;\ z_1)}$ и $\boldsymbol{B(x_2;\ y_2;z_2)}$.



$$\begin{aligned} &\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \\ &= \left(x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}\right) - \left(x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k}\right) = \\ &= \left(x_2 - x_1\right)\overline{i} + \left(y_2 - y_1\right)\overline{j} + \left(z_2 - z_1\right)\overline{k} \end{aligned} .$$

Следовательно, ***координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала***:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)\ .$$

4. Многогранники и тела вращения

4.1. Виды многогранников

Многогранник — геометрическое тело, которое ограничено конечным числом плоских многоугольников. Такие многоугольники называются гранями, их стороны — рёбрами, а их вершины — вершинами многогранника.

Многогранник может быть **выпуклым** — целиком расположен по одну сторону от плоскости одной из своих граней, или **невыпуклым (вогнутым)** — плоскости граней делят его на части.

Правильный многогранник — это выпуклый многогранник, грани которого — правильные многоугольники. При этом в каждой его вершине сходится одинаковое количество рёбер.

Призма — это выпуклый многогранник, две грани которого представляют собой равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях. При этом все рёбра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны между собой.

Призму с основаниями-треугольниками называют треугольной. По этому же принципу существуют четырёхугольные, пятиугольные и любые другие n-угольные призмы.

Призму, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскости основания, называют прямой. Все остальные призмы, не подходящие под это определение, — наклонные.

Призма называется правильной, если её основания — это правильные многоугольники.

Параллелепипед — это четырёхугольная призма, основания которой — параллелограммы.

Все 4 диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и пересекаются в одной точке. Длина его диагонали d и длины попарно перпендикулярных рёбер a,b,c при этом связаны соотношением:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Прямой параллелепипед, основания которого — это квадраты, называют кубом.

Пирамида — это многогранник, который состоит из многоугольника в основании и треугольников, образованных при соединении точки вершины пирамиды и вершин её основания.

Треугольники — это боковые грани пирамиды, а её ребра — это общие стороны треугольников. Также у пирамиды есть апофема — перпендикулярная прямая, опущенная из её вершины к стороне основания.

Если высота пирамиды соединяет её вершину с центром основания, а оно само представляет из себя правильный многоугольник, то и пирамида называется правильной. Все боковые грани такой фигуры — одинаковые равнобедренные треугольники. Если все грани правильной пирамиды — это равносторонние треугольники, то она называется правильным тетраэдром.

Если пирамиду разделяет плоскость, параллельная основанию фигуры, её нижняя часть называется усечённой пирамидой.

4.2 Справочный материал

Приведем основные сведения и формулы стереометрии.

Призма (рис. 1)

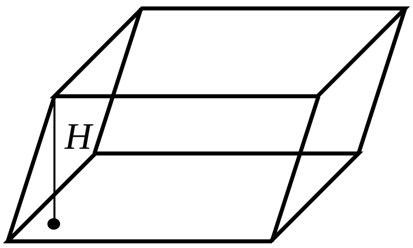


Рис. 1

$V = S_{осн} \cdot H$, где $s_{осн}$ – площадь основания, H – высота призмы.

Площадь боковой поверхности призмы $S_{бок}$ равна сумме площадей боковых граней. Площадь полной поверхности $S_{полн} = S_{бок} + 2\,S_{осн}$.

Прямая призма (рис. 2)

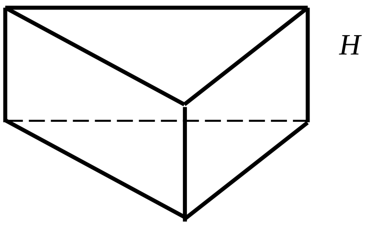


Рис. 2

$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, где $P_{осн}$ – периметр основания.

Прямоугольный параллелепипед (рис. 3)

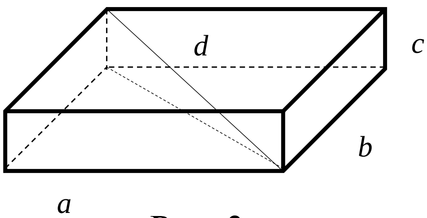
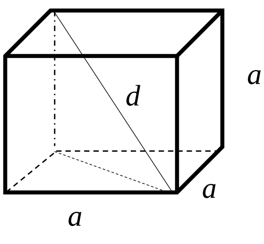


Рис. 3

$V = a\,b\,c.$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где d – диагональ параллелепипеда.

Куб (рис. 4)



$V = a^3,\ \ S_{бок} = 4a^2,\ \ S_{полн} = 6a^2.$

$d^2 = 3a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3}.$

Рис. 4

Пирамида (рис. 5)

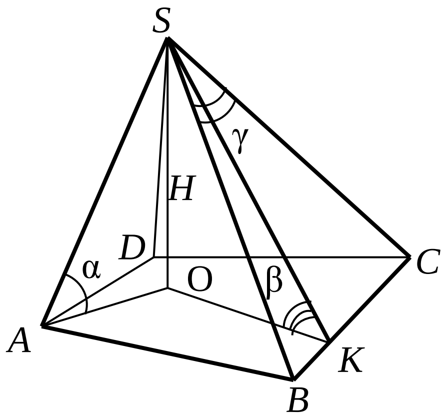


Рис. 5

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, H – высота пирамиды, $S_{осн}$ – площадь ее основания.

γ – один из плоских углов при вершине пирамиды.

α – угол наклона бокового ребра AS к плоскости основания (это угол между ребром AS и его проекцией AO на плоскость основания пирамиды).

β – линейный угол двугранного угла (между боковой гранью BSC и плоскостью основания пирамиды) при основании пирамиды.

Для построения угла β поступают так:

из основания O высоты SO пирамиды проводят перпендикуляр на сторону BC : $OK \perp BC$ и точку K соединяют с вершиной пирамиды S. На основании теоремы о трех перпендикулярах $SK \perp BC$.

Если в пирамиде равны боковые ребра, то вокруг основания пирамиды можно описать окружность и высота пирамиды проектируется в центр этой окружности.

Если в пирамиде равны двугранные углы при основании, то в основание пирамиды можно вписать окружность и высота пирамиды проектируется в центр этой окружности. В такой пирамиде высоты боковых граней равны и

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h,$$

где h – высота боковой грани.

Основание правильной пирамиды – равносторонний многоугольник и высота пирамиды проектируется в центр этого многоугольника (центр вписанной и описанной окружностей).

Высоту h боковой грани правильной пирамиды называют апофемой.

Цилиндр (рис. 6)

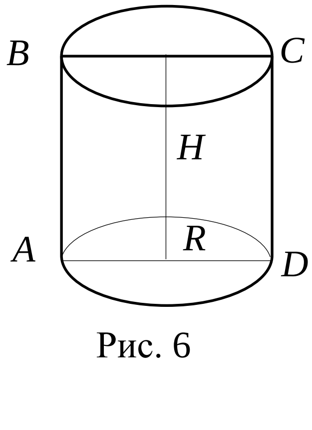


Рис. 6

$V = \pi R^2 H$.

$S_{бок} = 2\pi RH$.

$S_{полн} = S_{бок} + 2\ S_{осн}$.

$S_{осн} = \pi R^2$.

$S_{полн} = 2\ \pi R(R + H)$.

$ABCD$ – осевое сечение цилиндра

Конус (рис. 7)

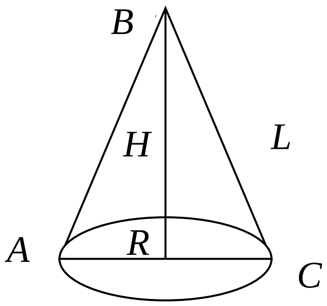


Рис. 7

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$

$S_{бок} = \pi RL$, где L – образующая конуса.

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

$S_{полн} = \pi R(R + L).$

ΔABC – осевое сечение конуса

Шар. Сфера (рис. 8)

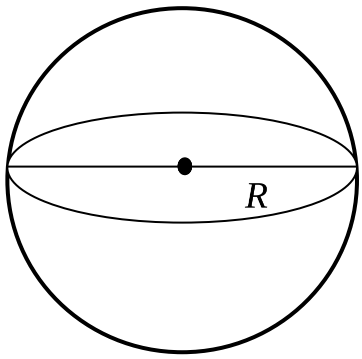


Рис. 8

$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$

$S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности сферы.

$D = 2R$ – диаметр шара.

4.3 Упражнения с решениями

1 Объем куба равен $2\sqrt{2}.$ Чему равен радиус окружности, описанной около грани куба (рис. 9)?

Решение.

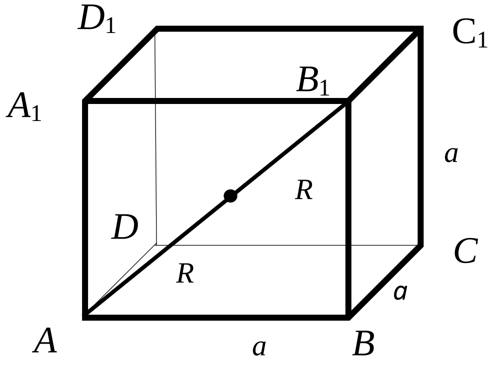


Рис. 9

$V = 2\sqrt{2}$ Так как объем куба $V = a^3$, то $a^3 = 2\sqrt{2}$, $a^3 = 2^{3/2} \Rightarrow a = 2^{1/2} = \sqrt{2}.$

Из $\Delta AB_1B: (AB_1)^2 = 2a^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow AB_1 = 2.$

Но $AB_1 = 2R$, где R – радиус окружности, описанной около грани куба. Тогда $2R = 2 \Rightarrow R = 1.$

Ответ: 1.

2 Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований, равна $16\sqrt{2}$. Найти длину ребра куба (рис. 10).

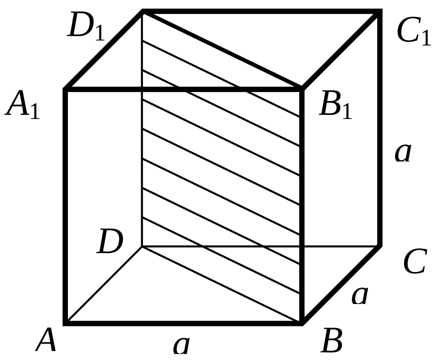


Рис. 10

Решение.

$S_{BB_1D_1D} = 16\sqrt{2}$. С другой стороны,

$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot a$.

Диагональ основания $BD = a\sqrt{2}$

(из ΔABD: $BD^2 = 2a^2$).

Следовательно, $S_{BB_1D_1D} = a^2\sqrt{2}$

Для определения ребра a получаем уравнение $a^2\sqrt{2} = 16$.

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$.

Ответ: 4.

3 Диагональ куба равна 3. Найти площадь его полной поверхности (рис. 11).

Решение.

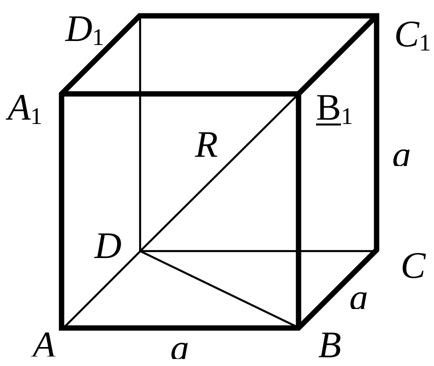


Рис. 11

$d = B_1D = 3$

Так как $d = a\sqrt{3}$, то $a\sqrt{3} = 3$,

$a = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Полная поверхность куба

$S_{полн} = 6a^2 = 6 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

4 Найти площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна 3, а стороны основания 8 и 6 (рис. 12).

Решение.

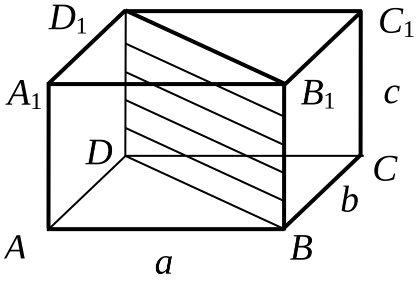


Рис. 12

$a = 8,\ b = 6,\ c = 3$,

$S_{сеч} = S_{BB_1D_1D} = BD \cdot c$.

Из прямоугольного треугольника ABD найдем BD:

$BD^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow \Rightarrow BD = 10$.

Тогда $S_{сеч} = 10 \cdot 3 = 30$.

Ответ: 30.

5 Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найти объем этого параллелепипеда, если высота его 6, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45° (рис. 13).

Решение.

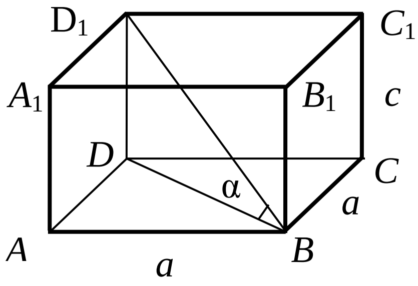


Рис. 13

$c = 6,\ \alpha = 45^\circ$, α – угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания, то есть угол между BD_1 и ее проекцией BD на плоскость основания.

$V = a^2 c$.

В ΔBD_1D: $D_1D = c = 6, \angle BD_1D = \alpha = 45^\circ$, следовательно, $BD = c = 6$.

Из ΔABD находим

$BD^2 = 2a^2 \Rightarrow 36 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 18.$

Тогда $V = 18 \cdot 6 = 108$.

Ответ: 108.

6 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 3 и 4. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда (рис. 14).

Решение.

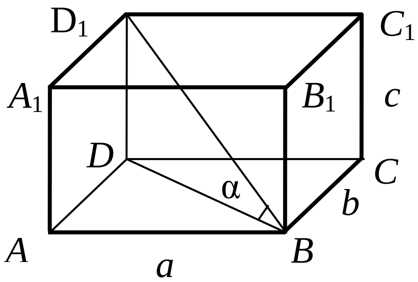


Рис. 14

$a = 4,\ b = 3,\ \alpha = 45^\circ.$

$S_{полн} = S_{бок} + 2\ S_{осн}.$

$S_{бок} = P_{осн} \cdot c = 2(a+b)c,$

$S_{осн} = ab.$ Тогда

$S_{полн} = 2(a+b)c + 2\ ab = 2((a+b)c + ab).$

В ΔBD_1D: $\angle DD_1B = \alpha$, поэтому $BD = DD_1 = c$.

Из ΔABD найдем $BD = c$, применив теорему Пифагора:

$BD^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25,\ BD = 5 \Rightarrow c = 5.$

Тогда $S_{полн} = 2(7 \cdot 5 + 12) = 2 \cdot 47 = 94.$

Ответ: 94.

7 В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как $2:1$, а диагональное сечение есть квадрат с площадью 25. Найти объём параллелепипеда (рис. 14).

Решение. $a : b = 2 : 1,\ S_{сеч} = S_{BB_1D_1D} = 25.$ Согласно условию, BB_1D_1D – квадрат, поэтому $BD = DD_1 = c$ и $S_{сеч} = c^2$. Тогда $c^2 = 25 \Rightarrow c = 5, BD = 5.$

Из ΔADB: $BD^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25.$ По условию $\dfrac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b.$

Для определения a и b получаем систему $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ a = 2b, \end{cases}$ из которой находим, что $4b^2 + b^2 = 25, 5b^2 = 25,\ b^2 = 5.$

Тогда $b = \sqrt{5}$, $a = 2\sqrt{5}$ и объем параллелепипеда

$$V = abc = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 = 50.$$

Ответ: 50.

8 В прямом параллелепипеде стороны основания $a = 3$ и $b = 6$ образуют угол 30°. Площадь боковой поверхности равна 24. Найти объем (рис. 15).

Решение.

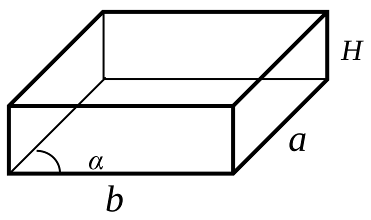


Рис. 15.

$a = 3,\ b = 6,\ \alpha = 30^\circ, S_{бок} = 24.$

Основание прямого параллелепипеда – параллелограмм. $V = S_{\text{осн}} H$.

Найдем $S_{осн} = ab\sin\alpha = 3 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 9.$

Далее, $S_{бок} = P_{осн} H = 2(3+6)H = 18H.$

Определим высоту H из уравнения

$18H = 24 \Rightarrow H = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3}.$ Тогда $V = 9 \cdot \dfrac{4}{3} = 12.$

Ответ: 12.

9 Высота прямого параллелепипеда равна $\sqrt{3}$, диагонали его составляют с основанием углы 45° и 60°, а основанием является ромб. Найти $2 \cdot V,$ где $V -$ объём параллелепипеда (рис. 16).

Решение.

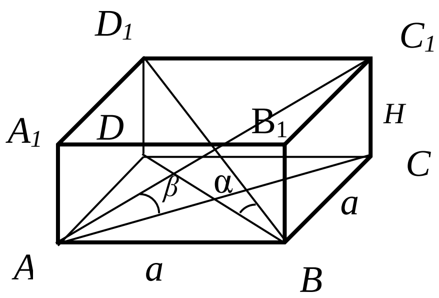


Рис. 16

$H = \sqrt{3},\ \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$

ABCD – ромб, $\alpha = \angle DBD_1 -$угол между диагональю BD_1 и плоскостью основания; $\beta = \angle C_1AC -$угол между диагональю AC_1 и той же плоскостью.

ΔBD_1D: $tg\alpha = \dfrac{H}{BD}$, $\quad \text{tg}\, 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{BD},$

$\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{BD} \Rightarrow BD = 1.$

$\Delta ACC_1:\ tg\beta = \dfrac{H}{AC},\ tg45^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{AC},\ 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = \sqrt{3}.$

Тогда $S_{осн} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ Объём параллелепипеда $V = S_{осн} H = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3}{2}.$ Вычислим $2 \cdot V = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3.$

Ответ: 3.

10 В основании призмы лежит равносторонний треугольник, площадь которого $9\sqrt{3}$. Найти объём призмы, если ее высота в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания (рис. 17).

Решение.

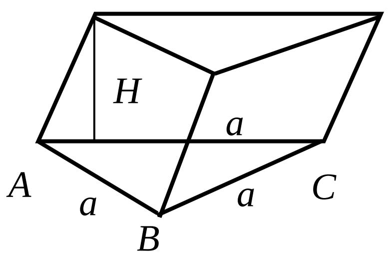


Рис. 17

$S_{осн} = S_{ABC} = 9\sqrt{3}, H = \sqrt{3}a.$

Площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Имеем:

$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},\ a^2 = 36 \Rightarrow a = 6.\quad H = 6\sqrt{3}.$

Тогда объем призмы равен

$V = S_{осн} \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 162.$

Ответ: 162.

11 В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $12\sqrt{12}$. Диагональ боковой грани, проходящей через катет, равна 13. Найти объём призмы (рис. 18).

Решение.

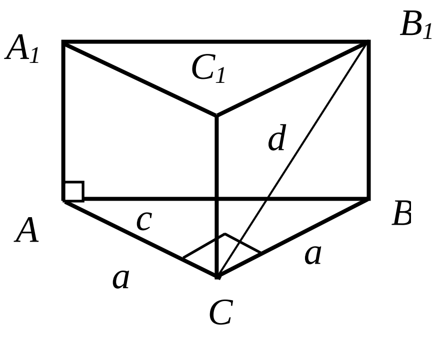


Рис. 18

$d = 13,\ c = 12\sqrt{2},\ AC = BC = a, BB_1 = H.$

$V = S_{осн} \cdot H;\quad S_{осн} = 0,5a^2.$

Для решения задачи нужно найти a и H. Из $\Delta ABC:\ \ 2a^2 = c^2, 2a^2 = 12^2 \cdot 2 \Rightarrow a^2 = 12^2, a = 12.$

Из $\Delta CB_1B:\ d^2 = H^2 + a^2,\quad 169 = H^2 + 144,$

$H^2 = 169 - 144 = 25,\ H = 5.$

Тогда $S_{осн} = \dfrac{1}{2} \cdot 12^2 = 72;\ V = 72 \cdot 5 = 360.$

Ответ: 360.

12 Основанием призмы служит квадрат со стороной $\sqrt{4-\sqrt{3}}$. Одна из боковых граней тоже квадрат, другая – ромб с углом 60°. Найти площадь полной поверхности призмы (рис. 19).

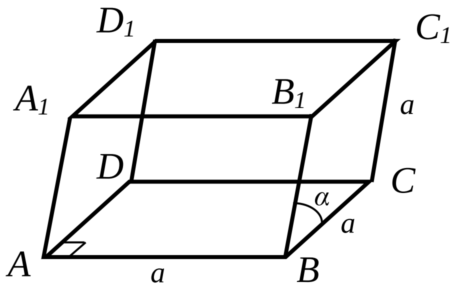


Рис. 19

Решение.

$a=\sqrt{4-\sqrt{3}}$. AA_1B_1B – квадрат,

BB_1C_1C – ромб, $\alpha=60^\circ$,

$ABCD$ – квадрат.

$S_{полн}=S_{бок}+2\,S_{осн}$, $S_{осн}=a^2$.

Площадь боковой поверхности найдем как сумму площадей боковых граней.

$$S_{бок}=2\,S_{AA_1B_1B}+2\,S_{BB_1C_1C},$$

$$S_{AA_1B_1B}=a^2,\ S_{BB_1C_1C}=a^2\cdot\sin\alpha=a^2\cdot\sin\,60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом,

$$S_{полн}=2a^2+2a^2+2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=4a^2+a^2\sqrt{3}=a^2\left(4+\sqrt{3}\right)=\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)=13.$$

Ответ: 13.

13 Найти площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 13, а боковое ребро равно 5 (рис. 20).

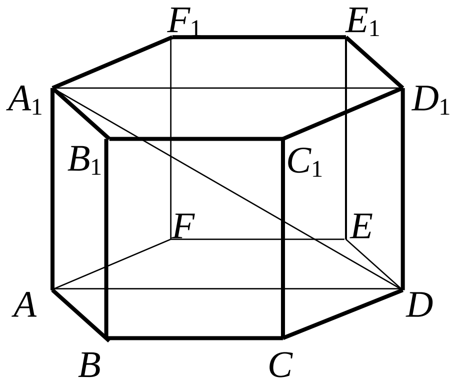


Рис. 20

Решение.

$d=A_1D=13, H=A_1A=5.$

$S_{бок}=P_{осн}\cdot H=5P_{осн},$

Из $\Delta AA_1D: d^2=H^2+AD^2$, $AD=2a$,

где $a=AB$ – сторона основания.

Таким образом,

$AD^2=d^2-H^2=169-25=144,$

$AD=12=2a, a=6$.

$P_{осн}=6a=36$. Тогда $S_{бок}=36\cdot5=180.$

Ответ: 180.

14 Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Площадь боковой поверхности этой пирамиды равна 3. Найти радиус окружности, описанной около боковой грани пирамиды (рис. 21).

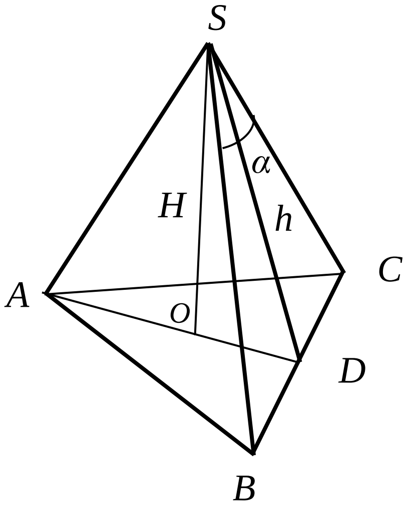


Рис. 21

Решение.

$\alpha = \angle BSC = 90^\circ$, $S_{бок} = 3$, R – радиус окружности, описанной около боковой грани. ΔBSC – прямоугольный. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

Поэтому $BC = 2R$.

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h$, где h – апофема.

$P_{осн} = 3 \cdot BC = 6R.$

В ΔBSC: $\angle BSD = \angle DBS = 45^\circ$, поэтому $SD = BD = R \Rightarrow h = R.$

Получаем: $3 = \frac{1}{2} \cdot 6R \cdot R \Rightarrow R^2 = 1,\ R = 1.$

Ответ: 1.

15 Высота правильной треугольной пирамиды $2\sqrt{3}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объём пирамиды (рис. 22).

Решение.

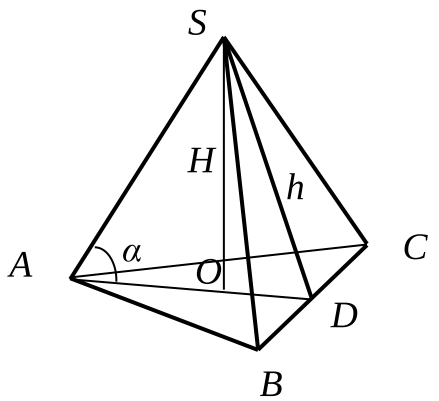


Рис. 22

$H = 2\sqrt{3},\ \alpha = 45^\circ.$

В ΔASO: $\angle ASO = 45^\circ, AO = OS = H = 2\sqrt{3},$

AD – высота основания. $AO = \frac{2}{3} \cdot AD$.

Если a– сторона основания, то $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Тогда $2\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 6$.

Объём пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{12} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18.. \textit{Ответ}: 18.$$

16 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{48}$, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 23).

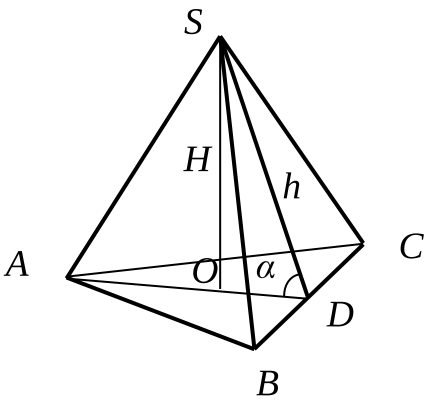


Рис. 23

Решение. $\alpha = 60^\circ, a = \sqrt[4]{48}$.

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн},\ S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h$, где $P_{осн} = 3a$.

Для решения задачи нужно найти h.

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OD = \frac{1}{3} AD = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

В ΔOSD: $\angle OSD = 30^\circ$.

Известно, что катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Поэтому $OD = \frac{1}{2} h \Rightarrow h = 2 \cdot OD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Следовательно,

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{полн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt[4]{48}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{48} = \frac{3\sqrt{144}}{4} = 9.$$

Ответ: 9.

17 По данной стороне основания $a = 8$ и боковому ребру $b = 6$ найти высоту правильной четырехугольной пирамиды (рис. 24).

Решение.

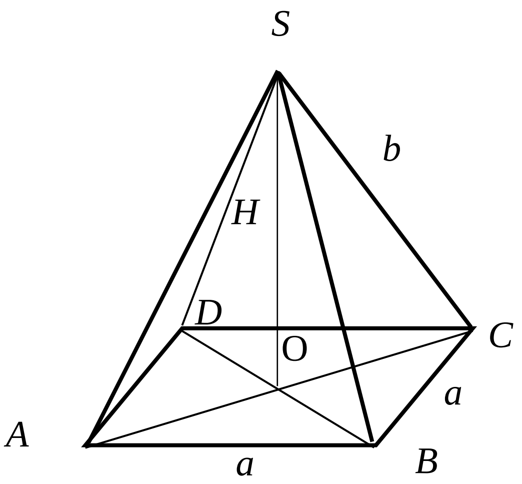


Рис. 24

$a = 8, b = 6.$

В ΔABC: $d = AC, d = a\sqrt{2}.$

$OC = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$

Из Δ OSC: $H^2 = b^2 - OC^2 =$

$= 36 - (4\sqrt{2})^2 = 36 - 32 = 4.$ $H = 2.$

Ответ: 2.

18 Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 36, а площадь боковой поверхности равна 60. Найти объём пирамиды (рис.25).

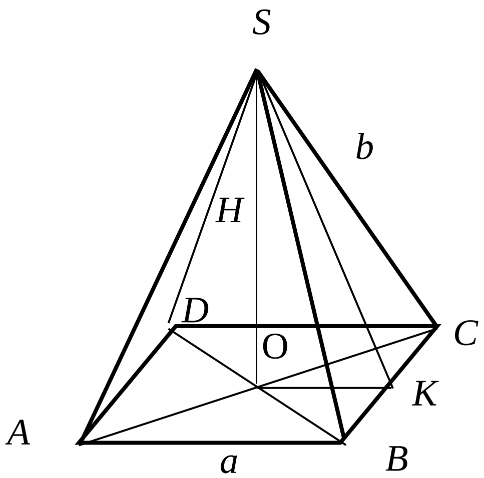


Рис. 25

Решение. $S_{осн} = 36, S_{бок} = 60.$

Основание пирамиды – квадрат, поэтому $S_{осн} = a^2, a^2 = 36, a = 6.$

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h$, где h– апофема.

$P_{осн} = 4a.$

Получаем: $60 = \frac{1}{2} \cdot 4ah \Rightarrow ah = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{30}{a} = 5,$ $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot H.$ Высоту пирамиды H найдем из ΔOSK:

$h = 5,$ $OK = 0{,}5a = 3,$

$H^2 = h^2 - OK^2 = 25 - 9 = 16, H = 4.$ Тогда $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48.$

Ответ: 48.

19 Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60°. Площадь основания пирамиды 16. Найти площадь боковой поверхности пирамиды (рис. 26).

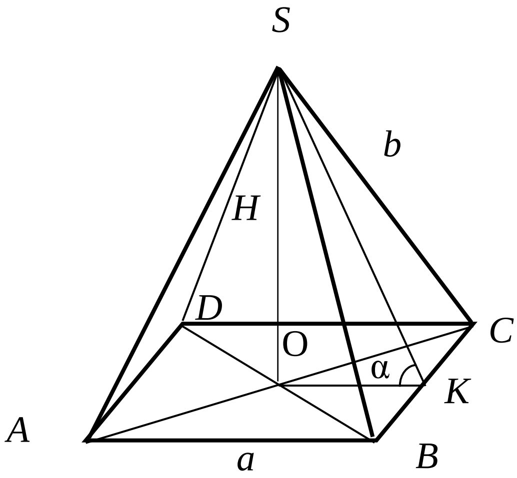


Рис. 26

Решение. $\alpha = 60^\circ, S_{осн} = 16$.

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h,$

где $P_{осн} = 4a, a = AB, h = SK$.

$S_{осн} = a^2, a^2 = 16, a = 4$.

В ΔOSK: $OK = \frac{a}{2} = 2$.

$\angle OSK = 30^\circ \Rightarrow OK = \frac{h}{2}, \quad 2 = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 4.$

Тогда $S_{бок} = 2ah = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$.

Ответ: 32.

20 Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 5. Тангенс двугранного угла при основании равен $\frac{4}{3}$. Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 26).

Решение. $h = 5, \ tg\alpha = \frac{4}{3}.$

$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = a^2 + \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h = a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = a^2 + 2\ ah =$$
$$= a(a + 2h) = a(a + 10).$$

Для решения задачи остается найти сторону основания a. Найдем $\cos\alpha$, зная, что $tg\alpha = \frac{4}{3}, \ 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \cos^2\alpha = \frac{9}{25},$
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Из ΔOSK: $\quad \cos\alpha = \frac{OK}{h} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{OK}{5}, \ OK = 3$.

Так как $OK = \frac{a}{2}$, то $\frac{a}{2} = 3, \quad a = 6$, то $S_{полн} = 6(6 + 10) = 96$.

Ответ: 96.

21 В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро $6\sqrt{2}$, а угол между боковым ребром и плоскостью основания 45°. Найти объём пирамиды (рис. 27).

Решение.

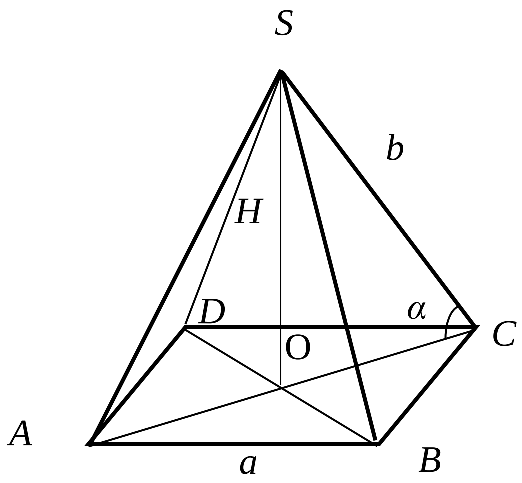


Рис. 27

$b = 6\sqrt{2}, \quad \alpha = 45^\circ.$

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H,\ S_{осн} = a^2.$

Тогда $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$.

В ΔOSC : $\angle OSC = \alpha \Rightarrow OC = H.$

По теореме Пифагора:

$2H^2 = 36 \cdot 2,\ H^2 = 36,\ H = 6.$

Значит, $OC = 6$. Далее,

$$OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = 6, a = 6\sqrt{2}$$

Тогда $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 2 \cdot 6 = 144.$

Ответ: 144.

22 В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно $3\sqrt{6}$. Объём пирамиды равен 54. Найти угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания (рис. 27).

Решение. $a = 3\sqrt{6}, \quad V = 54.$ $V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$. Получаем:

$$54 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6 \cdot H \Rightarrow H = 3. \ \alpha = \angle SCO.$$

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Из ΔOSC : $tg\alpha = \frac{H}{OC} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha = 30^\circ.$

Ответ: 30°.

23 Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 18 и 24. Каждое из боковых ребер равно 25. Найти объем пирамиды (рис. 28).

.

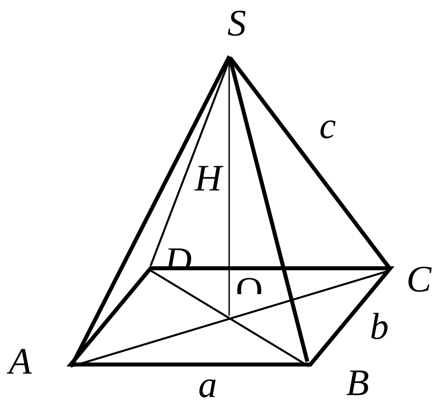


Рис. 28

Решение $a = 24$, $b = 18$, $c = AS = BS = CS = DS = 25$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H, \; S_{осн} = ab.$$

Тогда $V = \frac{1}{3} abH = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 24 \cdot H = 144 \cdot H$.

$$\Delta ABC: \quad AC^2 = a^2 + b^2 = 30^2 \Rightarrow AC = 30.$$

В ΔOSC: $OC = \frac{1}{2} AC = 15$, $H^2 = c^2 - OC^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow H = 20$.

Тогда $V = 144 \cdot 20 = 2880$.

Ответ: 2880.

Замечание. Обратите внимание, что в задаче 23 пирамида является неправильной, но ее боковые ребра равны. Поэтому высота OS проектируется в центр окружности, описанной около основания, то есть в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

24 Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен 30°. Боковое ребро $b = 2$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды (рис. 29).

Решение. $\alpha = \angle CSD = 30^\circ, b = SC = 2.$

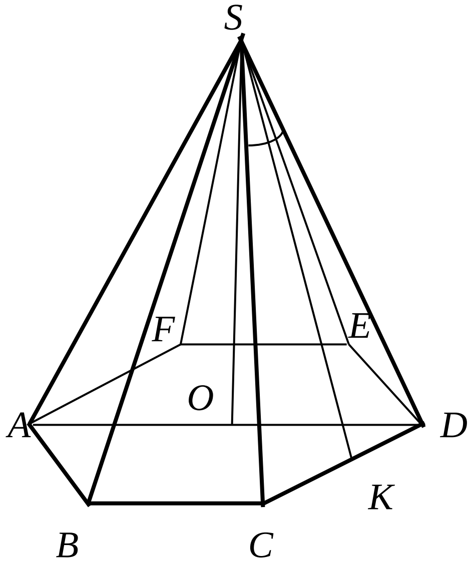


Рис. 29

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h$, где $P_{осн} = 6a, h = SK.$

Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 6\ ah = 3ah.$

$\Delta CSK:\ \ \angle CSK = \frac{\alpha}{2} = 15^\circ,$

$CK = \frac{a}{2},\ \ \frac{CK}{b} = \sin\ 15^\circ \Rightarrow$

$\frac{a}{2} = b \cdot \sin\ 15^\circ,\quad a = 2b\sin 15^\circ,$

$\cos\ 15^\circ = \frac{h}{b},\quad h = b \cdot \cos\ 15^\circ.$

Тогда

$$S_{бок} = 3 \cdot 2b\sin\ 15^\circ \cdot b\cos 15^\circ = 3b^2 \sin 30^\circ = = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

25 Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 20, двугранный угол при основании α. Найти площадь боковой грани, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ (рис. 30).

Решение.

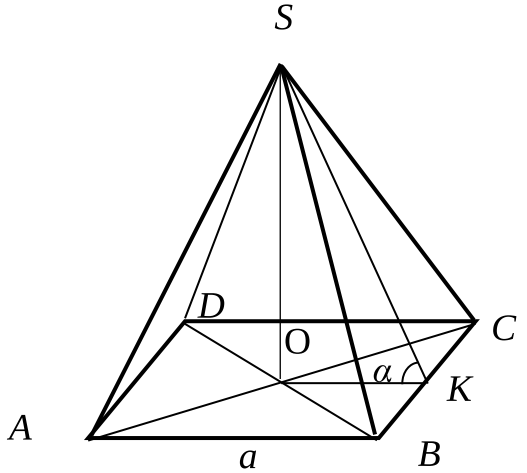


Рис. 30

$\cos\alpha = \frac{2}{3},\ S_{полн} = 20$.

Пусть $a = AB,\ h = SK$,

тогда $S_{BSC} = \frac{1}{2} ah$.

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}.$

Так как $S_{осн} = a^2$,

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = 2ah,$ то получаем уравнение $20 = a^2 + 2ah$.

Далее, из ΔOSK находим $OK = \frac{a}{2}$,

$\cos\alpha = \frac{OK}{h},\ \frac{2}{3} = \frac{a}{2h},\ 4h = 3a,\ h = \frac{3}{4}a.$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + 2ah = 20, \\ h = \dfrac{3}{4}a, \end{cases} \quad a^2 + \frac{3}{2}a^2 = 20, \; \frac{5a^2}{2} = 20, \; a^2 = 8.$$

Тогда $S_{BSC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{3}{4}a = \dfrac{3}{8}a^2 = \dfrac{3}{8} \cdot 8 = 3.$

Ответ: 3.

26 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его объём равен 48π. Найти его высоту (рис. 31).

Решение.

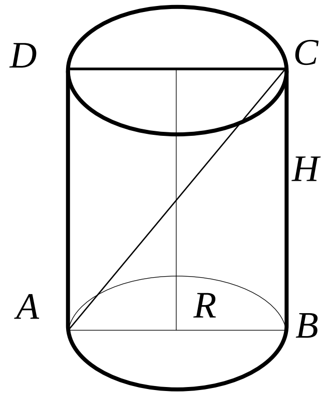


Рис. 31

$S_{бок} = 24\pi, \quad V = 48\pi.$

На основании формул

$S_{бок} = 2\pi RH$, $V = \pi R^2 H$ получаем:

$$\begin{cases} 2\pi RH = 24\pi, \\ \pi R^2 H = 48\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RH = 12, \\ R^2 H = 48. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем $R = \dfrac{48}{12} = 4$. Тогда $H = \dfrac{12}{R} = 3$.

Ответ: 3.

27 Объём цилиндра $8\pi\sqrt{5}$, а его высота $2\sqrt{5}$. Найти диагональ осевого сечения (рис. 31).

Решение. $V = \pi R^2 H$, $H = 2\sqrt{5}$, $V = 8\pi\sqrt{5}$. Получаем уравнение

$$\pi R^2 \cdot 2\sqrt{5} = 8\pi\sqrt{5} \Rightarrow R^2 = 4, \; R = 2.$$

$ABCD$ – осевое сечение цилиндра, $d = AC$ –диагональ этого сечения.

Из ΔABC находим $d^2 = H^2 + AB^2$

Так как $AB = 2R$, то $d^2 = H^2 + 4R^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + 16 = 20 + 16 = 36, \; d = 6.$

Ответ: 6.

28 Осевое сечение цилиндра – прямоугольник, диагональ которого равна a и образует с основанием угол 60°. Найти объём цилиндра, если $a = 8\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}$ (рис. 32).

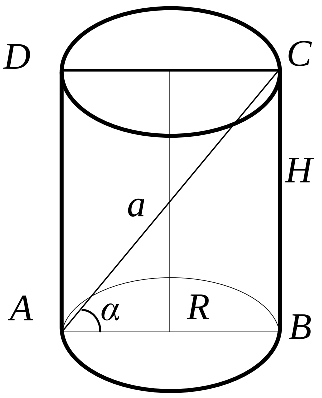


Рис. 32

Решение. $\alpha = 60^\circ,\ a = 8\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}$.

$V = \pi R^2 H$. В ΔABC: $\angle ACB = 30^\circ$.

Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, поэтому

$$AB = \frac{a}{2} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{4}.$$

Далее, $\sin\,60^\circ = \dfrac{H}{a},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{H}{a} \Rightarrow H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $V = \pi \cdot \dfrac{a^2}{16} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{32} \cdot a^3 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{32} \cdot 8^3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\pi} = \dfrac{3 \cdot 8 \cdot 64}{32} = 48.$

Ответ: 48.

29 Найти площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, если образующая его равна 4, а площадь основания равна $\dfrac{16}{\pi}$ (рис. 33).

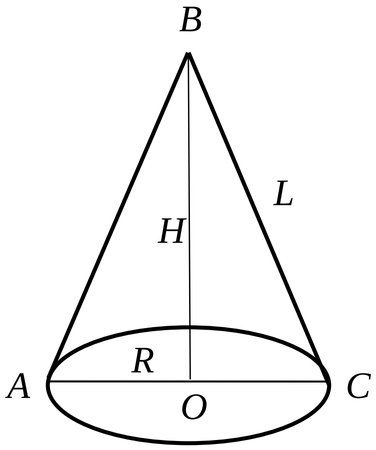


Рис. 33

Решение. $L = 4,\ S_{осн} = \dfrac{16}{\pi}.\ S_{бок} = \pi RL = 4\pi R.$

$$S_{осн} = \pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 = \frac{16}{\pi}.\ R^2 = \frac{16}{\pi^2},\ R = \frac{4}{\pi}.$$

Тогда $S_{бок} = 4\pi \cdot \dfrac{4}{\pi} = 16.$

Ответ: 16.

30 Образующая конуса L наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти полную поверхность конуса при $L = 6/\sqrt{\pi}$ (рис. 68).

Решение. $L = 6/\sqrt{\pi},\ \alpha = 60^\circ.\ S_{полн} = \pi R(R + L).$

Из ΔOBC находим $\angle OBC = 30^\circ,\ R = \dfrac{L}{2}$. Тогда

$$S_{полн} = \pi \cdot \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} + L\right) = \frac{3}{4}\pi L^2 = \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{6^2}{\pi} = 27.$$

Ответ: 27.

31 Объём конуса равен 9, а радиус его основания равен $3\pi^{-1/3}$. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости основания (рис. 34).

Решение.

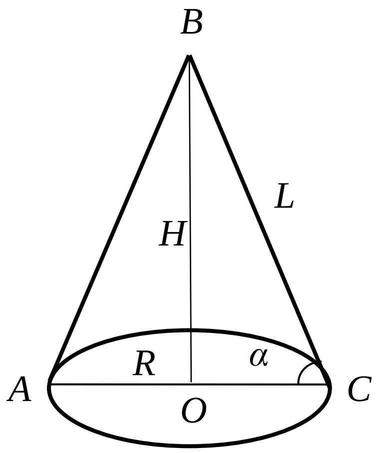


Рис. 34

$V=9,\ R=3\pi^{-1/3}$.

Так как $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2 H$, то

$$9=\frac{1}{3}\pi R^2 H \Rightarrow H=\frac{27}{\pi R^2}.$$

Из ΔOBC находим

$$tg\alpha=\frac{H}{R}=\frac{27}{\pi R^3}=\frac{27\pi}{\pi\cdot 27}=1\Rightarrow \alpha=45^\circ.$$

Ответ: 45°.

32 В конусе сумма высоты и радиуса основания равна $\dfrac{14}{\sqrt{\pi}}$, образующая наклонена к основанию под углом α. Найти площадь полной поверхности конуса, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ (рис. 34).

Решение. $H+R=\dfrac{14}{\sqrt{\pi}},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}.$ Пусть $\dfrac{14}{\sqrt{\pi}}=a.$ Тогда $H+R=a$. Так как $S_{полн}=\pi R\left(R+L\right)$, то для решения задачи нужно найти R и L.

В ΔOBC: $tg\alpha=\dfrac{H}{R}.$ Найдем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}.$

Тогда $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4},\ \dfrac{H}{R}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow H=\dfrac{3}{4}R.$

Подставляя это выражение в уравнение $H+R=a$, найдем R:

$\dfrac{3}{4}R+R=a,\ \dfrac{7}{4}R=a\Rightarrow R=\dfrac{4}{7}a.$ Далее, $\cos\alpha=\dfrac{R}{L}\Rightarrow\dfrac{4}{5}=\dfrac{4a}{7L}\Rightarrow L=\dfrac{5}{7}a.$

Находим $S_{полн}=\pi\cdot\dfrac{4}{7}a(\dfrac{4}{7}a+\dfrac{5}{7}a=\pi a^2\cdot\dfrac{4\cdot 9}{49}=\dfrac{36}{49}\pi\cdot\dfrac{14^2}{\pi}=144).$

Ответ: 144.

33 В конусе расстояние от центра основания до образующей равно $\dfrac{10}{\sqrt[3]{9\pi}}$, высота составляет с образующей угол β. Найти объём конуса, если $\sin\beta=2/3$ (рис. 35).

Решение.

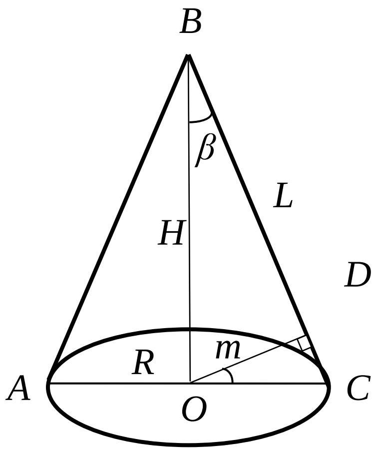


Рис. 35.

$$m=\frac{10}{\sqrt[3]{9\pi}},\quad \sin\beta=\frac{2}{3}.$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Из ΔOBD находим $\sin\beta=\frac{m}{H},\ \frac{2}{3}=\frac{m}{H}\Rightarrow H=\frac{3}{2}m.$

$\angle DOC=\angle OBD=\beta$ как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Из ΔODC находим $\cos\beta=\frac{m}{R}.$

Так как $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, то

$$\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{m}{R}\Rightarrow R=\frac{3m}{\sqrt{5}},\ V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{9m^2}{5}\cdot\frac{3}{2}m=\frac{9}{10}\pi m^3=\frac{9}{10}\pi\cdot\frac{1000}{9\pi}=100.$$

Ответ: 100.

34 В шаре на расстоянии $d=4$ от центра проведено сечение, площадь которого $S=9\pi.$ Найти радиус шара (рис. 36).

Решение.

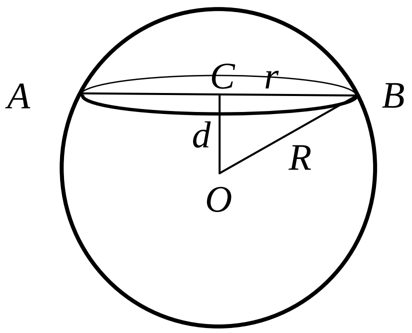


Рис. 36.

$d=4,\ \ S_{сеч}=9\pi.$

$S_{сеч}=\pi r^2\Rightarrow \pi r^2=9\pi\Rightarrow r^2=9\Rightarrow r=3.$

Из $\triangle ABC$:

$R^2=d^2+r^2=16+9=25\Rightarrow R=5.$

Ответ: 5.

35 Найти объём шара, если площадь его поверхности равна $4\sqrt[3]{36\pi}.$

Решение. $S=4\sqrt[3]{36\pi}.$ Площадь поверхности шара равна

$$S=4\pi R^2\Rightarrow R^2=\frac{S}{4\pi}\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Тогда объём $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{S^3}{\pi^3}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{4^3\cdot 36\pi}{\pi}}=\frac{8\cdot 6}{6}=8.$.

Ответ: 8.

36 Объём шара $8\sqrt{3}\pi.$ Найти объём куба, диагональ которого равна диаметру шара.

Решение. $V_ш = 8\sqrt{3}\pi.$ $D = d,$ где D – диагональ шара, d – диагональ куба.

Если R – радиус шара, a – ребро куба, то $D = 2R,$ $d = a\sqrt{3}.$

Следовательно, $a\sqrt{3} = 2R \Rightarrow a = \dfrac{2R}{\sqrt{3}},$ $V_{куба} = a^3 = \dfrac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$

Далее, $V_ш = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 8\sqrt{3}\pi,$ $R^3 = 6\sqrt{3},$ $V_{куба} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{3} = 16.$

Ответ: 16.

5. Тела вращения

Тело вращения — тело в пространстве, которое возникает при вращении какой-то фигуры вокруг определенной оси. Вращать можно любую фигуру и вокруг любой оси, тогда у нас будут получаться разные тела. Поверхность вращения — граница тела вращения. Ось, вокруг которой мы вращаем фигуру, называется осью вращения. В математике среди тел вращения наиболее часто встречаются цилиндр, конус, шар, эллипсоид и тор.

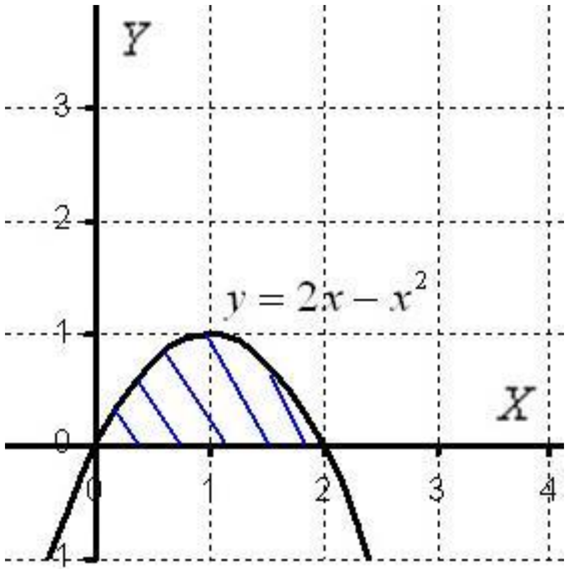
Определённый интеграл позволяет вычислять объём тела вращения — тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг её основания. Это приложение определённого интеграла, так как известно, что площадь любого поперечного сечения тела относительно одной оси (то есть известна функция такой площади). Тогда определённый интеграл от функции площади даёт требуемый объём.

5.1. Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси *Ox*.

Пример

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2,$ $y = 0,$ вокруг оси $Ox.$

Решение. Решение начинается с чертежа плоской фигуры. То есть на плоскости XOY нужно построить фигуру, ограниченную линиями , $y = 2x - x^2,$ $y = 0,$, при этом не забываем, что уравнение $y = 0$ задаёт ось $Ox.$



Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси *Ox*. В результате вращения получается такая немного яйцевидна яфигура, которая симметрична относительно оси *Ox*.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x) = 2x - x^2$ сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси *Ox*.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15} ед^2.$

6 Упражнения для самостоятельного решения

1 Диагональ куба равна 6. Найти площадь одной его грани.

2 Найти объём прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания 2 и 3, а диагональ параллелепипеда $\sqrt{38}$.

3 Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной $\sqrt{2}$. Найти объём этого параллелепипеда, если его диагональ образует с плоскостью основания угол 45°.

4 Найти площадь поверхности прямого параллелепипеда, стороны основания которого равны 8 и 12 и образуют угол 30°, а боковое ребро равно 6.

5 Объём правильной треугольной призмы равен $3\sqrt{3}$. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найти высоту призмы.

6 В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной $12\sqrt{2}$. Объём призмы равен 360. Найти длину диагонали той боковой грани, которая проходит через катет.

7 Найти площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ $\sqrt{34}$, а диагональ боковой грани 5.

8 Найти площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, если сторона основания равна 3, а диагональ боковой грани 5.

9 Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат. Объём параллелепипеда равен $16\sqrt{2}/\pi^3$, а площадь его боковой грани $8/\pi^2$. Найти длину окружности, описанной около боковой грани.

10 Площадь основания прямоугольного параллелепипеда равна 16, диагональ боковой грани $4\sqrt{3}$. Какой угол составляет диагональ параллелепипеда с основанием, если в основание можно вписать окружность?

11 Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найти объём параллелепипеда, если диагональ боковой грани равна $\sqrt[6]{54}$, а основанием параллелепипеда является квадрат.

12 Основанием прямой треугольной призмы является правильный треугольник. Диагональ боковой грани параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, синус которого равен $8/\sqrt{65}$. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его объём равен $2\sqrt{3}$.

13 Высота правильной треугольной пирамиды $2\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объём пирамиды.

14 Высота правильной четырехугольной пирамиды 7, а сторона основания 8. Найти боковое ребро.

15 Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 60, сторона основания 6. Найти объём пирамиды.

16 Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 6 и 15. Высота пирамиды равна 4 и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

17 Найти объём правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна 36.

18 Объём правильной четырехугольной пирамиды равен $8\sqrt{2}/3$, а боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если $tg\alpha = 2\sqrt{2}$.

19 Объём правильной треугольной пирамиды равен 32, а высота $2\sqrt{3}$. Найти периметр основания.

20 Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 40, боковая грань ее наклонена к плоскости основания под углом α. Найти сторону основания пирамиды, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

21 Площадь боковой поверхности конуса равна 11, а длина образующей $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Найти площадь основания конуса.

22 Найти объём прямого кругового конуса, высота которого 3, длина окружности $4\sqrt{\pi}$.

23 Найти объём конуса, радиус основания которого равен $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°.

24 Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Площадь полной поверхности конуса равна 18. Найти площадь основания конуса.

25 Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°, а радиус окружности, описанной около этого сечения, равен $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3\pi}}$. Найти объём конуса.

26 Расстояние от центра основания конуса до образующей равно $\dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}$, образующая составляет с высотой угол β. Найти площадь полной поверхности конуса, если $\sin\beta = \dfrac{2}{3}$.

27 Объём конуса равен 40π, образующая составляет с высотой угол β. Найти образующую, если $\cos\beta = \dfrac{5}{7}$.

28 Площадь полной поверхности конуса 24π, образующая наклонена к основанию под углом α. Найти периметр осевого сечения, если $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

29 Сумма высоты и образующей конуса $16/\sqrt{\pi}$, угол между высотой и образующей α. Найти площадь полной поверхности конуса, если $\cos\alpha = 0{,}6$.

30 Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна $\sqrt[3]{\dfrac{24\sqrt{2}}{\pi}}$. Найти объём цилиндра.

31 Найти диаметр шара, если его объём равен $2048\pi/3$.

32 Площадь поверхности одного шара равен 393. Найти площадь поверхности другого шара, у которого радиус в $\sqrt{3}$ раза меньше, чем у данного.

33 Площадь поверхности шара равна $\pi \cdot 3^{5/3}$. Найти объём куба, если диагональ куба равна диаметру шара.

6.1. Ответы

1 12.	**2** 30.	**3** 4.	**4** 336.
5 3.	**6** 13.	**7** 66.	**8** 72.
9 4.	**10** 45.	**11** 2.	**12** 24.
13 24.	**14** 9.	**15** 48.	**16** 126.
17 144.	**18** 16.	**19** 24.	**20** 4.
21 242.	**22** 4.	**23** 1.	**24** 6.
25 8.	**26** 8.	**27** 7.	**28** 16.
29 144.	**30** 3.	**31** 16.	**32** 131.
33 3.			

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Багрова, В.Н. Дополнительные главы элементарной математики: учебно-методическое пособие к выполнению аудиторных и домашних заданий (для студентов целевого обучения). В 4 ч. Ч. 4. Геометрия / В.Н. Багрова, О.Б. Сухорукова, Е.В. Кручинина; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2015. – 40 с.

Александров, А.Д. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб.пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. /А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – Висагинас, Alfa, 1998. – 376 с.

Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т 2: Стереометрия, преобразование пространства. – 3-е изд. стереотип. – М.: МЦНМО, 2015. – 256 с.: ил.

Алексанров, П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями / М.:Наука, Физматгиз, 1968. – 912 с.