РОСЖЕЛДОР

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»**

(ФГБОУ ВО РГУПС)

П.В. Харламов, С.Л. Горин

ТРЕНИЕ И ИЗНОС В МАШИНАХ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям

Ростов-на-Дону
2017

УДК 621.86(07) + 06

Рецензент – кандидат технических наук, доцент В.Е. Зиновьев

Харламов, П.В.

Трание и износ в машинах: учебно-методическое пособие к практическим занятиям / П.В. Харламов, С.Л. Горин; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 32 с.

В методических указаниях изложена методика, в трибологической практике, чаще всего используемая для управления эксплуатационными параметрами (нагрузка, скорость) и подбора концентрации компонентов в веществе (например, в смазке) и т.д. Основная цель пособия заключается в организации самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям, а также для самостоятельной работы обучающихся при освоении дисциплины «Трение и износ в машинах».

Предназначено для студентов технических специальностей и направлений подготовки всех форм обучения.

Одобрено к изданию кафедрой «Транспортные машины и триботехника».

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность научных исследований главным образом определяется их организацией и квалификацией кадров.

Работы с низким уровнем выполнения, неэффективные по выбору метода, бездоказательные в изложении методики, воспроизводимости и надёжности результатов не могут дать высокие результаты, а зачастую являются просто ошибочными.

Планирование эксперимента обеспечивает целенаправленность и организованность действий осуществляемых с объектом исследований, грамотную регистрацию и обработку опытных данных, существенно способствует повышению производительности труда и надёжности полученных результатов. Важным достоинством метода является его универсальность, пригодность в огромном количестве областей исследования, интересующих современного человека.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под ***экспериментом*** будем понимать совокупность операций, совершаемых над объектом исследования с целью получения информации о его свойствах. Эксперимент, в котором исследователь по своему усмотрению может изменять условия его проведения, называется активным экспериментом. Если исследователь не может самостоятельно изменять условия его проведения, а лишь регистрирует их, то это пассивный эксперимент.

Важнейшей задачей методов обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача построения математической модели изучаемого явления, процесса, объекта. Ее можно использовать и при анализе процессов, и при проектировании объектов. Можно получить хорошо аппроксимирующую математическую модель, если целенаправленно применяется активный эксперимент. Другой задачей обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача оптимизации, т.е. нахождения такой комбинации влияющих независимых переменных, при которой выбранный параметр оптимизации принимает экстремальное значение.

Опыт – это отдельная экспериментальная часть.

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок проведения опытов.

Планирование эксперимента – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий, направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели и определения оптимальных условий). Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

В процессе измерений, последующей обработки данных, а также формализации результатов в виде математической модели возникают погрешности и теряется часть информации, содержащейся в исходных данных. Применение методов планирования эксперимента позволяет определить погрешность математической модели и судить о ее адекватности. Если точность модели оказывается недостаточной, то применение методов планирования эксперимента позволяет модернизировать математическую модель с проведением дополнительных опытов без потери предыдущей информации и с минимальными затратами.

Цель планирования эксперимента – нахождение таких условий и правил проведения эксперимента, при которых удается получить надежную и достоверную информацию об объекте исследований при минимальном количестве опытов, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой точности.

2 ВЫБОР МОДЕЛИ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальному изучению любой системы должен предшествовать её анализ – предварительное изучение предполагаемого объекта исследований с целью получения информации, необходимой для постановки задачи и принятия решения о первоначальном этапе экспериментальной работы. Для этого можно использовать как системный, так и статистический анализы.

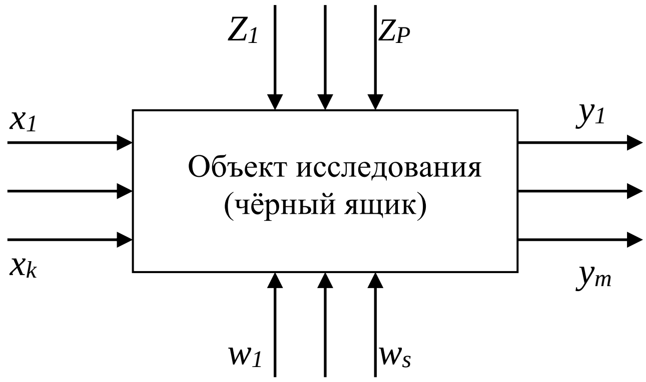


Рис. 1. Модель объекта исследований на стадии постановки задачи

Следующий этап связан с *выбором модели исследования.* В данном случае целесообразно использование кибернетического подхода, в основу которого положена идея «чёрного ящика» [1].

Принципы построения такой модели обычно соответствуют априорным представлениям об объекте исследований в условиях неполного знания механизма явлений сложных многофакторных задач.

Под «чёрным ящиком» (рис. 1) понимается принцип изображения процесса в виде кибернетической модели с входными управлениями – $x_1;\ x_2 \dots x_k$, контролируемыми – $Z_1;\ Z_2 \dots Z_P$ и неконтролируемыми $W_1;\ W_2 \dots W_S$ факторами и выходными параметрами оптимизации – $y_1;\ y_2 \dots y_m$ (отклик, критерий оптимизации, целевая функция).

Параметр оптимизации y (отклик) – это признак, по которому оптимизируется процесс, результат опыта, полученный в соответствующих условиях по заданному плану.

Область определения параметра оптимизации – множество значений, которые может принимать параметр оптимизации; может быть непрерывной и дискретной, ограниченной и неограниченной.

Если параметр оптимизации трудно представить количественно, тогда используются субъективные ранговые параметры: сорт, класс, балл и так далее.

Если параметр оптимизации не имеет достоверных или прямых методов оценки (ускорение, градиент напряжений или температуры), то можно использовать косвенные оценки. Однако в этих случаях поиск оптимума значительно усложняется.

В тех задачах, когда требуется исследуемый процесс охарактеризовать несколькими откликами, необходимо выбирать ***обобщённый отклик:***

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} y_{ui}}\ ,$$

где Y_i – обобщённый отклик в i-м опыте; $\prod_{u=1}^{n} y_{ui}$ – произведение частных откликов y_u.

Имеется несколько способов построения обобщённого оклика:

1) по двум крайним показателям каждого из частных откликов [2];
2) путём сравнения каждого отклика с «идеалом» [2];
3) использование экспертных оценок [1, 3, 4];
4) сравнение частных откликов;
5) нахождение зависимости между частными окликами [2, 3, 4];
6) использование функции желательности [1, 2];
7) использование метода неопределённых множителей Лагранжа [3, 4].

После того как выбран объект исследования и параметр оптимизации, нужно включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтённым, то это может привести к неприятным последствиям (например, увеличить ошибку опыта).

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определённое значение. Факторы соответствуют способам воздействия на объект исследования и имеют область определения.

Под ***областью определения фактора*** понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор; может быть непрерывной и дискретной.

Выбор ***управляемых факторов x.*** Управляемыми факторами являются такие, которыми можно управлять в процессе исследования (например, нагрузка, напряжение, скорость, концентрация компонентов в веществе и так далее).

Факторы должны быть:
1) совместными (не мешать и не накладываться друг на друга, не взаимодействовать друг с другом в определённых условиях);
2) некоррелируемыми, то есть имеющими возможность изменять значения каждого из них независимо друг от друга.

В процессе эксперимента задаются конкретные значения факторов и они должны поддерживаться в течение заданного времени. Эти конкретные значения называются ***уровнями варьирования факторов***, представляющими собой диапазоны изменения факторов, то есть интервалы их изменения.

Часто при постановке задачи область определения факторов бывает заданной. Например, при определении коэффициента трения мы заранее знаем области изменения нагрузок, скоростей, состояние поверхностей и так далее.

К ***контролируемым факторам Z*** относятся менее существенные. В период испытания их поддерживают на определённом уровне. В ряде случаев в качестве контролируемых факторов принимают несовместные и коррегируемые. К ним следует отнести, например, температуру окружающей среды.

Неуправляемые факторы w (возмущающие параметры) являются неконтролируемыми и, как правило, недоступны для измерения. Их значения изменяются во времени случайным образом.

После того как выбран параметр оптимизации y (отклик), найдены управляемые x и контролируемые факторы Z, переходят к построению модели объекта исследований.

3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Объектом исследования в данной работе является узел трения (например, прямоугольная накладка, совершающая возвратно-поступательное движение вдоль направляющей скольжения), к которому приложены входные варьируемые факторы давление P (X_1) и скорость скольжения V (X_2).

В результате выполнения работы с применением метода планирования эксперимента при реализации ортогонального центрального композиционного плана второго порядка (ОЦКП-2) необходимо получить математическую зависимость параметра оптимизации – интенсивности изнашивания J или коэффициента трения f от варьируемых факторов P (X_1) и V (X_2) и определить область его оптимальных значений.

На практике по заданным в соответствии с планом эксперимента сочетаниям варьируемых факторов получают соответствующие им дискретные значения выходного параметра оптимизации, главным образом экспериментальным путём, либо берут по имеющимся литературным данным. Численные значения варьируемых факторов и параметра оптимизации рассчитывают и измеряют с помощью аппаратуры, в рассматриваемом нами случае они заданы заранее (приложение А и В).

По полученным зависимостям строят геометрическую интерпретацию уравнения регрессии и производят выбор оптимального сочетания нагрузочно-скоростных режимов эксплуатации, материалов и конструкций узлов трения.

4 МЕТОДИКА РАСЧЁТА С ПРИМЕРОМ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1 Исходные данные

Таблица 1

Исходные данные для расчёта

Входные факторы			
Давление x_1 (P), МПа		**Скорость x_2 (V), м/с**	
Нулевой уровень $(x_0)_1$	**Интервал варьирования $(\Delta x)_1$**	**Нулевой уровень $(x_0)_2$**	**Интервал варьирования $(\Delta x)_2$**
5	3	0,12	0,03
Номер опыта	**Выходной параметр оптимизации: интенсивность изнашивания I**		
	I_1	***I_2***	***I_3***
1	0,650	0,590	0,890
2	5,580	5,090	5,440
3	1,240	1,360	1,270
4	6,610	6,230	6,930
5	0,920	1,070	0,960
6	5,370	5,730	5,430
7	1,540	1,510	1,240
8	2,020	2,030	2,460
9	1,870	1,340	1,710

4.2 Выбор плана эксперимента и уравнения регрессии в общем виде

Стратегия применения планов заключается в принципе постепенного планирования – постепенного усложнения модели. Начинают с простейшей модели, находятся для нее коэффициенты, определяется ее точность. Если точность не удовлетворяет, то планирование и модель постепенно усложняются.

Если факторы и интервалы их варьирования выбраны удовлетворительно, а план первого порядка не дал адекватной модели, рекомендуется строить модель в виде квадратного полинома, то есть построить план второго порядка:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k,n} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot x_i^2 ,$$

где $\hat{y}$ – функция отклика; b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} – оценки коэффициентов уравнения регрессии, характеризующие соответственно свободный член уравнения, линейные, квадратичные эффекты и эффект взаимодействия; i – число факторов, $i = 1,2,...,k$; j – число сочетаний факторов; x_i, x_j – варьируемые факторы.

Увеличение числа членов уравнения приводит к увеличению числа опытов по сравнению с матрицами первого порядка. Число членов квадратичной модели равно:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot (k+2),$$

где k – число факторов модели. Так, например, для $k = 2$ $\lambda = \frac{1}{2} \cdot (2+1) \cdot (2+2) = 6$, уравнение регрессии примет вид $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$.

Чтобы сократить число дополнительных опытов, как правило, используется ***ядро плана*** с матрицей полного факторного эксперимента – уравнения первого порядка, к которому добавляются точки (опыты). Такие планы называются ***композиционными планами***.

Если точки плана располагаются симметрично относительно центра, такой ***план*** называется ***центральным***.

Планирование считается оптимальным, если оно связано с проведением несложных вычислений и позволяет получить независимые оценки коэффициентов регрессии, определяемые с одинаковой дисперсией. Важно, чтобы дисперсии параметра оптимизации, предсказываемого уравнением регрессии, не зависели от вращения системы координат в центре плана. Данным условиям отвечает планирование, обладающее свойствами ортогональности и рототабельности.

Плечо α можно выбирать так, чтобы в матрице сумма построенных произведений любых двух столбцов равнялась нулю. Такой ***план*** называется ***ортогональным*** [5, 6]. Ортогональность плана – свойство, при котором матрица моментов для заданной модели является диагональной.

В общем виде уравнение регрессии ортогонального центрального композиционного плана второго порядка для двухфакторного эксперимента будет:

$$\hat{y} = b_0^{/} + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{11} \cdot x_1^2 + b_{22} \cdot x_2^2 ,$$

где $b_0^{/}$ – оценка свободного члена уравнения после приведения плана к ортогональному;

$$b_0^{/} = b_0 - b_{11} \cdot \bar{x}_1^2 - b_{22} \cdot \bar{x}_2^2,$$

где $\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2$ – сумма квадратов фактора, делённая на количество опытов.

Общее число опытов для плана второго порядка:

$$n = n_1 + n_\alpha + n_0 = 2^k + 2 \cdot k + n_0,$$

где n_1 – число опытов ядра плана, $n_1 = 2^k = 2^2 = 4$;

n_α – число звёздных точек, $n_\alpha = 2 \cdot k = 2 \cdot 2 = 4$;

n_0 – число опытов в центре плана, $n_0 = 1$;

k – число факторов, $k = 2$.

$$n = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9.$$

Геометрическая интерпретация области исследований в общем виде представлена на рис. 2, где x_1, x_2 – входные факторы; 1, 2, 3, 4 – опыты в ядре плана; 5, 6, 7, 8 – звёздные точки "α"; 9 – опыт в центре плана; -1, 0, +1 – нижний, нулевой и верхний уровни варьирования.

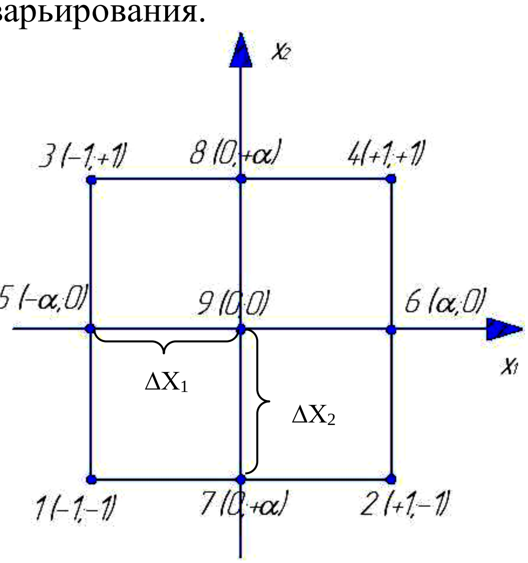


Рис. 2. Геометрическая интерпретация области исследований

Полная ортогональность матрицы планирования второго порядка достигается преобразованием квадратов факторов:

$$X_i^2 = x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{u=1}^{n} x_{iu}^2 = x_i^2 - \bar{x}_i^2,$$

где n – количество опытов; u – порядковый номер опыта; $\bar{x}_i^2$ – сумма квадратов i-го фактора, делённая на количество опытов.

Для опытов № 5, 6, 7, 8 величина звёздного плеча определяется по формуле:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{n_1 \cdot n} - n_1}{2}},$$

где n_1 – число опытов ядра плана; n – общее число опытов.

Для двухфакторного эксперимента $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{4 \cdot 9} - 4}{2}} = 1$.

Например, первый опыт для первого фактора:

$$X_{11}^{2} = X_{11}^{2} - \overline{X}_{11}^{2};$$
$$X_{11}^{2} = (-1)^{2} = 1;$$
$$\overline{X}_{11}^{2} = \frac{1}{9} \cdot \left[(-1)^{2} + 1^{2} + (-1)^{2} + 1^{2} + (-1)^{2} + 1^{2}\right] = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};$$
$$X_{11}^{2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Седьмой опыт соответственно для первого и второго факторов:

$$X_{17}^{2} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3};$$
$$X_{27}^{2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
и так далее.

Матрица плана эксперимента представлена в таблице 3.

Для построения стандартной план-матрицы эксперимента осуществим перевод натуральных значений факторов в безразмерные, то есть их кодирование.

Давление, X_1 (P):

- нижний уровень фактора $(x_{-1})_1 = (x_0 - \Delta x)_1$, где $(x_0)_1$ – нулевой уровень (задан), 5 МПа; $(\Delta x)_1$ – интервал варьирования (задан), 3 МПа.

$$(x_{-1})_1 = 5 - 3 = 2 \text{ МПа};$$

- верхний уровень фактора $(x_{+1})_1 = (x_0 + \Delta x)_1$,

$$(x_{+1})_1 = 5 + 3 = 8 \text{ МПа};$$

Скорость скольжения, X_2 (V):

- нижний уровень фактора $(x_{-1})_2 = 0{,}12 - 0{,}03 = 0{,}09$ м/с;
- верхний уровень $(x_{+1})_2 = 0{,}12 + 0{,}03 = 0{,}15$ м/с.

Перевод натуральных значений входных факторов в кодовые:

$$X_i = \frac{x_i - x_0}{\Delta x_i},$$

где X_i – кодированное значение i-го фактора; x_i – текущее значение i-го фактора в именованных (натуральных) единицах; x_0 – значение основного уровня варьируемого i-го фактора в именованных (натуральных) единицах; Δx_i – интервал варьируемого i-го фактора $\Delta x_i = \dfrac{x_{i\,max} - x_{i\,min}}{2}$.

Например, для первого и второго фактора:

$$(X_{-1})_1 = \frac{2-5}{3} = \frac{-3}{3} = -1; \qquad (X_{-1})_2 = \frac{0{,}09 - 0{,}12}{0{,}03} = -1;$$
$$(X_0)_1 = \frac{5-5}{5} = 0; \qquad (X_0)_2 = \frac{0{,}12 - 0{,}12}{0{,}03} = 0;$$
$$(X_{+1})_1 = \frac{8-5}{3} = \frac{3}{3} = +1. \qquad (X_{+1})_2 = \frac{0{,}15 - 0{,}12}{0{,}03} = +1.$$

Таблица 2

Ортогональный план и матрица планирования

№ опы–та	Натуральные значения входных факторов		Кодовые значения входных факторов						Выходной параметр оптимизации – интенсивность изнашивания			
	Давление P, МПа	Скорость V, м/с	X_0	X_1	X_2	X_{12}	X_1^2	X_2^2	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}$
Ядро плана 2² ($n_1 = 2^k = 2^2 = 4$)												
1	2	0,09	+1	-1	-1	+1	$1/3$	$1/3$	0,650	0,590	0,890	0,710
2	8	0,09	+1	+1	-1	-1	$1/3$	$1/3$	5,580	5,090	5,440	5,370
3	2	0,15	+1	-1	+1	-1	$1/3$	$1/3$	1,240	1,360	1,270	1,290
4	8	0,15	+1	+1	+1	+1	$1/3$	$1/3$	6,610	6,230	6,930	6,590
Звёздные точки ($n_\alpha = 2 \cdot k = 2 \cdot 2 = 4$)												
5	2	0,12	+1	-1	0	0	$1/3$	$-2/3$	0,920	1,070	0,960	0,983
6	8	0,12	+1	+1	0	0	$1/3$	$-2/3$	5,370	5,730	5,430	5,510
7	5	0,09	+1	0	-1	0	$-2/3$	$1/3$	1,540	1,510	1,240	1,430
8	5	0,15	+1	0	+1	0	$-2/3$	$1/3$	2,020	2,030	2,460	2,170
Центральные точки ($n_0 = 1$)												
9	5	0,12	+1	0	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1,870	1,340	1,710	1,640
Сумма среднеарифметических значений $\sum \bar{y}_{vi} =$												25,693

Средние значения функций отклика параллельных опытов рассчитываются по формуле:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{r} \cdot \sum_{v=1}^{r} y_{uv} ,$$

где u – порядковый номер опыта, $u = 1 \dots 9$; r – число параллельных опытов, $r = 3$; y_{uv} – результат опыта, то есть экспериментальные значения интенсивности изнашивания.

Например, для первого опыта

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}65 + 0{,}59 + 0{,}89) = 0{,}71.$$

Результаты вычислений представлены в таблице 2.

4.3 Проверка гипотезы об однородности дисперсий опытов

Дисперсии параллельных опытов определяем по формуле:

$$\bar{S}_u^2 = \frac{1}{r-1} \cdot \sum_{v=1}^{r} \Delta^2 = \frac{1}{r-1} \cdot \sum_{v=1}^{r} \left(y_{uv} - \bar{y}_u\right)^2 ,$$

где $\Delta^2 = \left(y_{uv} - \bar{y}_u\right)^2$ – квадратичное отклонение для соответствующего опыта u и параллельного опыта v; $\sum_{v=1}^{r} \left(y_{uv} - \bar{y}_u\right)^2$ – суммарное квадратичное отклонение u опыта; y_{uv} – значение отклика для опыта u в соответствующем параллельном опыте ν; $\bar{y}_u$ – средний отклик в опыте u.

Например, для первого опыта:

$$\Delta_{11}^2 = \left(y_1 - \bar{y}\right)^2 = (0{,}65 - 0{,}71)^2 = 0{,}0036;$$

$$\Delta_{12}^2 = \left(y_2 - \bar{y}\right)^2 = (0{,}59 - 0{,}71)^2 = 0{,}0144;$$

$$\Delta_{13}^2 = \left(y_3 - \bar{y}\right)^2 = (0{,}89 - 0{,}71)^2 = 0{,}0324;$$

$$\bar{S}_1^2 = \frac{1}{3-1} \cdot (0{,}0036 + 0{,}0144 + 0{,}0324) = 0{,}0252.$$

Например, для третьего опыта:

$$\Delta_{31}^2 = \left(y_1 - \bar{y}\right)^2 = (1{,}240 - 1{,}290)^2 = 0{,}0025;$$

$$\Delta_{32}^2 = \left(y_2 - \bar{y}\right)^2 = (1{,}360 - 1{,}290)^2 = 0{,}0049$$

$$\Delta_{33}^2 = \left(y_3 - \bar{y}\right)^2 = (1{,}270 - 1{,}290)^2 = 0{,}0004;$$

$$\bar{S}_3^2 = \frac{1}{3-1} \cdot (0{,}0025 + 0{,}0049 + 0{,}0004) = 0{,}0039.$$

Результаты расчёта квадратичных отклонений и дисперсий параллельных опытов представлены в таблице 4.

В качестве критерия проверки выдвинутой гипотезы об однородности дисперсий примем критерий Кохрена, предназначенный для сравнения нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объёма, расчётное значение которого вычисляется по формуле:

Таблица 3

Дисперсии параллельных опытов $\bar{S}_u^2$

№	**Отклонение** $\Delta = y_{uv} - \bar{y}_u$			$\Delta^2 = (y_{uv} - \bar{y}_u)^2$			$\sum\Delta^2 = \sum(y_i - \bar{y})^2$	$\bar{S}_u^2$
	$y_1 - \bar{y}$	$y_2 - \bar{y}$	$y_3 - \bar{y}$	$(y_1 - \bar{y})^2$	$(y_2 - \bar{y})^2$	$(y_3 - \bar{y})^2$		
1	-0,06	-0,12	0,18	0,0036	0,0144	0,0324	0,0504	0,0252
2	0,21	-0,28	0,07	0,0441	0,0784	0,0049	0,1274	0,0637
3	-0,05	0,07	-0,02	0,0025	0,0049	0,0004	0,0078	0,0039
4	0,02	-0,36	0,34	0,0004	0,1296	0,1156	0,2456	**0,1228**
5	-0,063	0,087	-0,023	0,00397	0,00757	0,00053	0,012067	0,006
6	-0,14	0,22	-0,08	0,0196	0,0484	0,0064	0,0744	0,0372
7	0,11	0,08	-0,19	0,0121	0,0064	0,0361	0,0546	0,0273
8	-0,15	-0,14	0,29	0,0225	0,0196	0,0841	0,1262	0,0631
9	0,23	-0,3	0,07	0,0529	0,09	0,0049	0,1478	0,0739
Суммарное значение дисперсии параллельных опытов $\sum\bar{S}_u^2 =$								0,4231

$$G_p = \frac{\bar{S}^2_{u\,max}}{\sum_{u=1}^{n} \bar{S}_u^2},$$

где $\bar{S}^2_{u\,max}$ – наибольшее значение дисперсии параллельных опытов; $\sum_{u=1}^{n} \bar{S}_u^2$ – суммарное значение дисперсии параллельных опытов,

$$G_p = \frac{0{,}1228}{0{,}4321} = 0{,}2902.$$

Для проверки гипотезы об однородности дисперсий по таблице критических точек распределения Кохрена найдём критическую точку

$$G_{кр}(\alpha;\ f_1;\ f_2),$$

где α – уровень значимости, $\alpha = 0{,}05$;

f_1 – число степеней свободы (числителя), $f_1 = r - 1 = 2$;

f_2 – количество выборок (знаменателя), $f_2 = n = 9$.

Уровень значимости α связан с доверительной вероятностью появления события зависимостью:

$$\Re = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95,$$

что соответствует доверительной вероятности 95%. Определяются критические значения критерия при соответствующих степенях свободы числителя и знаменателя. Проверка гипотезы сводится к сравнению с табличным значением. Если расчётное значение критерия меньше критического, то выдвинутую гипотезу принимают; в противном случае – отвергают.

$$G_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 0{,}4775.$$

Сравнение расчётного и табличного значения критерия Кохрена показало, что

$$G_{кр} = 0{,}4775 > G_р = 0{,}2902,$$

следовательно, ГИПОТЕЗА ОБ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОПЫТОВ ПРИНИМАЕТСЯ.

4.4 Определение коэффициентов уравнения регрессии

4.4.1 Расчёт коэффициентов уравнения регрессии

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{iu}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{n} X_{iu}^2}; \quad b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{iu}X_{ju}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{n}\left(X_{iu}X_{ju}\right)^2}; \quad b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{iu}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{n}\left(X_{iu}^{/}\right)^2}; \quad b_0^{/} = b_0 - \sum_{u=1}^{n} b_{ii}\bar{X}_{iu}^2$$

где X_{iu} – кодовое значение фактора.

$$b_0 = \frac{0{,}71 + 5{,}37 + 1{,}29 + 6{,}59 + 0{,}983 + 5{,}51 + 1{,}43 + 2{,}17 + 1{,}64}{9} = \frac{25{,}693}{9} = 2{,}855;$$

$$b_1 = \frac{-0{,}71 + 5{,}37 - 1{,}29 + 6{,}59 - 0{,}983 + 5{,}51}{6} = 2{,}414;$$

$$b_2 = \frac{-0{,}71 - 5{,}37 + 1{,}29 + 6{,}59 - 1{,}43 + 2{,}17}{6} = 0{,}4233;$$

$$b_{12} = \frac{0{,}71 - 5{,}37 - 1{,}29 + 6{,}59}{4} = 0{,}16;$$

$$b_{11} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}71 + 5{,}37 + 1{,}29 + 6{,}59 + 0{,}983 + 5{,}51\right) - \frac{2}{3}\cdot\left(1{,}43 + 2{,}17 + 1{,}64\right)}{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = 1{,}66;$$

$$\mathrm{b}_{22} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}71 + 5{,}37 + 1{,}29 + 6{,}59 + 1{,}43 + 2{,}17\right) - \frac{2}{3}\cdot\left(0{,}983 + 5{,}51 + 1{,}64\right)}{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 0{,}215;$$

$$\mathrm{b}_0^{/} = 2{,}855 - \frac{2}{3}\cdot 0{,}16 - \frac{2}{3}\cdot 1{,}662 = 1{,}603.$$

Результаты расчёта сведём в таблицу 4.

Уравнение регрессии после расчёта всех коэффициентов примет вид:

$$\hat{y} = 1{,}603 + 2{,}414\cdot x_1 - 0{,}4233\cdot x_2 + 0{,}16\cdot x_1\cdot x_2 + 1{,}66\cdot x_1^2 + 0{,}215\cdot x_2^2.$$

4.4.2 Дисперсия воспроизводимости эксперимента

Мы рассмотрели, как подсчитывается дисперсия в каждом опыте, однако матрица планирования состоит из серии опытов, поэтому дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсий всех опытов. По терминологии, принятой в планировании эксперимента, речь идёт о подсчёте дисперсии параметра оптимизации или, что то же самое, ***дисперсии воспроизводимости эксперимента:***

$$S^2(y) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{u=1}^{n}\bar{S}_u^2 = \frac{1}{n\cdot(r-1)}\cdot\sum_{u=1}^{n}\left(y_{uv} - \bar{y}_u\right)^2,$$

где $\sum_{u=1}^{n} \overline{S}_u^2$ – суммарное значение дисперсии параллельных опытов; n – общее число опытов; r – число параллельных опытов эксперимента, при числе степеней свободы f_E средней дисперсии, равной сумме чисел степеней свободы дисперсий, из которых она вычислена

$$f_E = n \cdot (r-1).$$

Тогда

$$S^2(y) = \frac{1}{9} \cdot 0{,}4231 = 0{,}047;$$

$$f_E = 9 \cdot (3-1) = 18.$$

Средне квадратичная ошибка эксперимента:

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)},$$

где $S^2(y)$ − дисперсия воспроизводимости эксперимента.

Тогда $S(y) = \sqrt{0{,}047} = 0{,}217.$

4.4.3 Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии

$$S^2(b_i) = \frac{S^2(y)}{r \cdot \sum_{u=1}^{n} X_{iu}^2}; \quad S^2(b_{ij}) = \frac{S^2(y)}{r \cdot \sum_{u=1}^{n} X_{iu} X_{ju}}; \quad S^2(b_{ii}) = \frac{S^2(y)}{r \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(X_{iu}^{/}\right)^2};$$

$$S^2(b_0^{/}) = \frac{S^2(y)}{r \cdot \sum_{u=1}^{n} X_{0u}^2} + \sum_{u=1}^{n} S^2(b_{ii}) \cdot \overline{X}_{iu}^2$$

Например, для рассматриваемого случая:

$$S^2(b_1) = S^2(b_2) = \frac{0{,}047}{3 \cdot 6} = 2{,}61 \cdot 10^{-3};$$

$$S^2(b_{12}) = \frac{0{,}047}{3 \cdot 4} = 3{,}92 \cdot 10^{-3};$$

$$S^2(b_{11}) = S^2(b_{22}) = \frac{0{,}047}{3 \cdot 2} = 7{,}83 \cdot 10^{-3};$$

$$S^2(b_0^{/}) = \frac{0{,}047}{3 \cdot 9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3{,}92 \cdot 10^{-3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 7{,}83 \cdot 10^{-3} = 8{,}71 \cdot 10^{-3}.$$

Результаты расчёта представлены в таблице 4.

Средне-квадратичные ошибки коэффициентов уравнения регрессии:

$$S(b_i) = \sqrt{S^2(b_i)},$$

где $S^2(b_i)$ – дисперсии коэффициентов уравнения.

$$S(b_1) = S(b_2) = \sqrt{2{,}61 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0511;$$

$$S(b_{12}) = \sqrt{8{,}2 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0626;$$

$$S(b_{11}) = S(b_{22}) = \sqrt{1{,}64 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0885;$$

$$S(b_0^{/}) = \sqrt{1{,}82 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0933.$$

Результаты расчёта представлены в таблице 4.

4.4.4 Оценка статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии

Проверка значимости каждого коэффициента проводится независимо. Её можно осуществлять проверкой по *t*-критерию (критерию Стьюдента) и построением доверительного интервала.

Доверительные интервалы определялись по формуле

$$\Delta b_i = \pm t \cdot S(b_i),$$

где *t* – ***табличное значение критерия Стьюдента*** при:

- числе степеней свободы f_E, с которыми определялась дисперсия коэффициента регрессии,
- выбранном уровне значимости,

$S(b_i)$ – квадратичная ошибка коэффициента регрессии.

Табличное значение критерия составляет $t(\alpha; f) = t(0{,}05; 18) = 2{,}101$.

Коэффициент статистически будет значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала:

$$|b_i| > \Delta b_i .$$

В нашем примере доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии будут равными:

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = 2{,}101 \cdot 0{,}0511 = 0{,}1074;$$

$$\Delta b_{12} = 2{,}101 \cdot 0{,}0626 = 0{,}1315;$$

$$\Delta b_{11} = \Delta b_{22} = 2{,}101 \cdot 0{,}0885 = 0{,}1859;$$

$$\Delta b_0^{/} = 2{,}101 \cdot 0{,}0933 = 0{,}1978.$$

Результаты расчёта Δb_i и оценки статистической значимости представлены в таблице 4.

Таблица 4

Коэффициенты уравнения регрессии, их дисперсии,
средне-квадратичные ошибки, доверительные интервалы и
статистическая значимость

	Коэффициенты	**Дисперсии** $S^2(b_i)$	**Средне-квадратичные ошибки** $S(b_i)$	**Доверительные интервалы** Δb_i	**Статистическая значимость коэффициентов**
	$b_0^{/} = +1{,}603$	*8,71·10⁻³*	*0,0933*	*0,1978*	*Значим*

	$b_1 = +2,41$	*2,61·10⁻³*	*0,0511*	*0,1074*	*Значим*
	$b_2 = +0,423$	*2,61·10⁻³*	*0,0511*	*0,1074*	*Значим*
	$b_{12} = +0,16$	*3,92·10⁻³*	*0,0626*	*0,1315*	*Значим*
	$b_{11} = +1,66$	*7,83·10⁻³*	*0,0885*	*0,1859*	*Значим*
	$b_{22} = +0,215$	*7,83·10⁻³*	*0,0885*	*0,1859*	*Значим*

После оценки статистической значимости коэффициентов уравнение регрессии приняло окончательный вид:

$$\hat{I} = 1.603 + 2.414 \cdot X_1 + 0.423 \cdot X_2 + 0.16 X_1 \cdot X_2 + 1.66 \cdot X_1^2 + 0.215 \cdot X_2^2 .$$

4.5 Определение расчётных значений выходного параметра оптимизации

Для определения расчётного значения параметра оптимизации $\hat{y}$ – интенсивности изнашивания $\hat{I}$ необходимо в полученное уравнение регрессии поочерёдно (в соответствии с матрицей плана) подставить кодовые значения варьируемых факторов.

Расчётные значения выходного параметра оптимизации $\hat{y}$ – интенсивности изнашивания $\hat{I}$ по уравнению представлены в табл. 5.

Таблица 5

К расчёту дисперсии адекватности и множественного коэффициента корреляции

№	Средний отклик $\bar{I}$	Расчётный отклик $\hat{I}$	Отклонение $\Delta_{ад} = \bar{I} - \hat{I}$	Квадратичное отклонение $\Delta_{ад}^2 = \left(\bar{I} - \hat{I}\right)^2$
1	0,710	0,803	-0,093	0,008649
2	5,370	5,312	0,058	0,003364
3	1,290	1,33	-0,04	0,0016
4	6,590	6,479	0,111	0,012321
5	0,983	0,851	0,132	0,017424
6	5,510	5,68	-0,17	0,0289
7	1,430	1,395	0,035	0,001225
8	2,170	2,242	-0,072	0,005184
9	1,640	1,603	0,037	0,001369
Суммарное значение квадратичного отклонения к расчёту дисперсии адекватности опытов $\sum \Delta_{ад}^2 =$				0,080036

4.6 Проверка адекватности модели

4.6.1 Дисперсия адекватности

Далее проверяется соответствие полученной модели (уравнения регрессии) результатам опытов. Чтобы проверить гипотезу об адекватности, необходимо оценить отклонение полученного (расчётного) уравнения регрессии $\widehat{y}$ от результатов эксперимента $\bar{y}$ в различных точках факторного пространства.

Рассеяние точек эксперимента относительно уравнения связи (отклика), аппроксимирующего функциональную зависимость, можно охарактеризовать с помощью ***остаточной дисперсии адекватности***, которая справедлива при равном числе дублирующих опытов:

$$S^2_{ад} = \frac{r}{n-\lambda} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(\bar{y}_u - \widehat{y}_u\right)^2 ,$$

где r – число параллельных (дублирующих) опытов; n – общее число опытов эксперимента; λ – число значимых коэффициентов аппроксимирующего полинома, включая свободный член; $\sum \Delta^2_{ад} = \sum \left(\bar{y} - \widehat{y}\right)^2$ – суммарное квадратичное отклонение опытов (по табл. 7)

и определяется числом степеней свободы

$$f_{ад} = n - \lambda ,$$

где $f_{ад}$ – число степеней свободы для дисперсии адекватности, равное числу различных опытов n, результаты которых используются при подсчёте коэффициентов регрессии, минус число определяемых коэффициентов уравнения регрессии.

В нашем примере:

$$S^2_{ад} = \frac{3}{9-3} \cdot 0{,}080036 = 0{,}040018;$$

$$f_{ад} = 9 - 3 = 6.$$

4.6.2 Проверка на адекватность уравнения регрессии

Первый вопрос, который нас интересует после вычисления коэффициентов модели, это проверка соответствия модели изучаемому физическому процессу или ***проверка адекватности модели***.

Проверка на адекватность окончательного уравнения регрессии производилась по F-критерию (критерию Фишера), которая состоит в выяснении соотношения между дисперсией адекватности и дисперсий воспроизводимости эксперимента.

Расчётные значения F-критерия определялись по отношению:

$$F_p = \frac{S^2_б}{S^2_м} ,$$

где $S_б^2$ – большее значение из рассмотренных дисперсий; $S_м^2$ – меньшее значение из рассмотренных дисперсий.

Удобство использования критерия Фишера состоит в том, что проверку гипотезы можно свести к сравнению с табличным значением. Если рассчитанное значение F-критерия не превышает табличного, то с соответствующей доверительной вероятностью ***модель можно считать адекватной***. В этом случае мы можем перейти к крутому восхождению к точке экстремума.

В нашем случае имеются две дисперсии, причём $S_{ад}^2 < S^2(y)$, поэтому в качестве большей дисперсии принимаем $S^2(y)$. Тогда:

$$F_p = \frac{S^2(y)}{S_{ад}^2} = \frac{0{,}040018}{0{,}047} = 0{,}851.$$

Для проверки гипотезы адекватности модели по таблице критических точек распределения Фишера найдём критическую точку:

$$F_{кр}(\alpha;\, f_1;\, f_2),$$

где α – уровень значимости, $\alpha = 0{,}05$;

$f_1 = f_E$ – число степеней свободы большей дисперсии (средней дисперсии), по формуле $f_E = n \cdot (r-1)$

$f_2 = f_{ад}$ – число степеней свободы меньшей дисперсии (адекватности модели), по формуле $f_{ад} = n - \lambda$.

$$F_{кр}(0{,}05;18;3) \cong 3{,}2.$$

Сравнение расчётного и табличного значения критерия Фишера показало, что

$$F_{кр} = 3{,}2 > F_р = 0{,}851,$$

что свидетельствует об адекватности построенной модели (уравнения регрессии).

4.7 Определение оптимальных нагрузочно-скоростных режимов работы узла трения

Координаты точки экстремума (максимума выпуклости или минимума вогнутости поверхности) функции отклика найдём путём последовательного дифференцирования уравнения регрессии с последующим приравниванием к нулю частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = 2{,}414 + 0{,}16 \cdot X_2 + 3{,}32 \cdot X_1 = 0; \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 0{,}423 + 0{,}16 \cdot X_1 + 0{,}43 \cdot X_2. \end{cases}$$

В результате решения уравнений найдены оптимальные значения входных факторов в кодовом виде $x_{1опт} = 0{,}692$; $x_{2опт} = 0{,}726$, при которых функция отклика имеет минимальное значение.

Подставив в уравнение регрессии найденные оптимальные значения входных факторов x_1 и x_2, находим минимальное значение коэффициента трения в исследуемом факторном пространстве:

$$I_{\min} = 1{,}603 + 2{,}414 \cdot (-0{,}692) + 0{,}423 \cdot (-0{,}726) + 0{,}16 \cdot (-0{,}692) \cdot (-0{,}726)$$
$$+ 1{,}66 \cdot (-0{,}692)^2 + 0{,}215 \cdot (-0{,}726)^2 = 0{,}615.$$

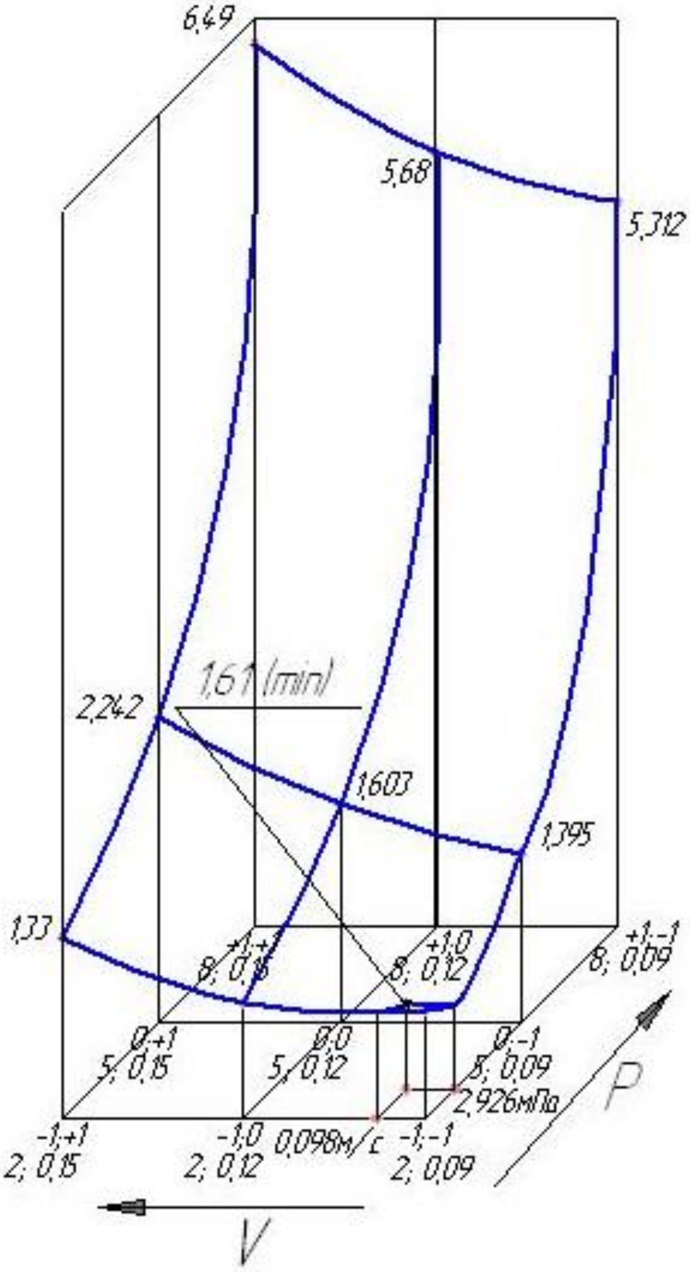
Обратный переход от кодовых значений варьируемых факторов к натуральным осуществляется по формуле:

$$x_i = x_0 + X_i \cdot \Delta x_i .$$

Натуральные значения координат точки минимума функции отклика равны

$$P_{опт} = 5 + (-0{,}692) \cdot 3 = 2{,}926 \text{ МПа};$$

$$\mathrm{V}_{опт} = 0{,}12 + (-0{,}726) \cdot 0{,}098 = 0{,}1 \, м/с$$



4.8 Геометрическая интерпретация уравнения регрессии

Геометрическая интерпретация уравнения регрессии строилась в трёхмерной системе координат. По вертикальной оси откладывались значения выходного параметра, соответствующие сочетаниям уровней двух входных варьируемых факторов согласно количеству опытов плана эксперимента. Полученная геометрическая фигура является геометрической интерпретацией уравнения регрессии, отражающего степень влияния входных факторов на выходной параметр оптимизации (рис. 3).

Рис. 3. Геометрическая интерпретация уравнения регрессии

5 ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Величина коэффициента регрессии – ***количественная мера*** этого влияния. Чем больше коэффициент – тем сильнее влияет фактор. Их геометрический смысл – тангенсы углов наклона гиперплоскости к соответствующей оси. Больший по абсолютной величине коэффициент соответствует большему углу наклона и, следовательно, более существенному изменению параметра оптимизации при изменении данного фактора.

О ***характере влияния*** факторов говорят знаки коэффициентов. Знак плюс свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора растёт величина параметра оптимизации, а при знаке минус – убывает. ***Интерпретация знаков*** при оптимизации зависит от того, ищем ли мы максимум или минимум функции отклика. Если $y \Rightarrow max$, то увеличение значений всех факторов, коэффициенты которых имеют знак плюс, благоприятно, а имеющих знак минус – неблагоприятно. Если же $y \Rightarrow min$, то, наоборот, благоприятно увеличение значений тех факторов, знаки которых отрицательны.

Библиографический список

1 **Евдокимов Ю.А.** Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа/ Ю.А. Евдокимов, В.И. Колесников, А.И. Тетерин – М.: Наука, 1980 – 228с.

2 **Тихомиров В.Б.** Планирование и анализ эксперимента/ В.Б. Тихомиров– М.: Лёгкая индустрия, 1974 – 263с.

3 **Шенх Х.** Теория инженерного эксперимента/ Х. Шенх – М.: Мир, 1972 – 361с.

4 **Львовский Е.Н.** Статистические методы построения эмпирических формул/ Е.Н. Львовский – М.: Высш.шк., 1982 – 224с.

5 **Ахназарова С.Л.** Методы птимизации эксперимента в химической технологии/ Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. – М.: Высш. шк., 1985 –327с.

6 **Евдокимов Ю.А.** Программное сопровождение работ по триботехнике. Ч.1. Обработка экспериментальных данных методом планирования эксперимента.: учеб. пособие/ Ю.А. Евдокимов, В.В. Шаповалов, А.Л. Озябкин – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т путей сообщения, 2003. –123 с.

7 **Дымов Н.В.** Планирование эксперимента при исследовании и автоматизированном проектировании путевых и строительных машин: метод. указания/ Н.В. Дымов – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т путей сообщения, 1998. – 24 с

Приложение А

Значение параметра оптимизации

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	А			Б			В		
	Выходной параметр оптимизации – коэффициент трения								
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
1	0,566	0,533	0,566	0,516	0,533	0,550	0,266	0,233	0,21 6
	0,466	0,453	0,456	0,440	0,466	0,443	0,173	0,166	0,186
3	0.683	0,666	0,666	0,650	0,666	0,650	0,300	0,330	0,316,
4	0,506	0,520	0,500	0,500	0,493	0,480	0,200	0,206	0,213
5	0.600	0,566	0,583	0,550	0,566	0,566	0,233	0,266	0,233
6	0,480	0,493	0,483	0,466	0,473	0,466	0,180	0,183	0,193
7	0,483	0,511	0,488	0,455	0,466	0,488	0,200	0,194	0,188
8	0.555	0,533	0,566	0,522	0,544	0,511	0,222	0,233	0,244
9	0.511	0,522	0,488	0,472	0,500	0,505	0,211	0,222	0,211

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Г			Д			Е		
	Выходной параметр оптимизации – коэффициент трения								
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
1	0,200	0.216	0,200	0,183	0,183	0,200	0,177	0,194	0,177
2	0,160	0,166	0,153	0,150	0,153	0,160	0,137	0,151	0,144
3	0.266	0,283	0,283	0,250	0,266	0,250	0,227	0,244	0,227
4	0,180	0,186	0,190	0,183	0,180	0,170	0,157	0,171	0,177
5	0.233	0,233	0,216	0,216	0.200	0,216	0,194	0,194	0,177
6	0,160	0.166	0,173	0,160	0,170	0,163	0,144	0,164	0,151
7	0,177	0,172	0,161	0,177	0,172	0,161	0,161	0,149	0,155
8	0.211	0,200	0,205	0,205	0,194	0,200	0,177	0,183	0,172
9	0.188	0,194	0,177	0,183	0,177	0,172	0,166	0,161	0,161

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Ж			З			И		
	Выходной параметр оптимизации – интенсивность изнашивания								
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
1	1,81	1,59	1,76	2,57	2,62	2,88	0,65	0,59	0,89
2	7,65	7,63	7,43	8,95	8,74	9,01	5,58	5,09	5,54
3	0,41	0,59	0,44	1,31	1,37	1,01	1,24	1,36	1,27
4	5,29	4,58	5,01	6,78	6,19	6,59	6,61	6,23	6,93
5	0,99	1,24	1,10	1,64	1,78	1,41	0,92	1,07	0,95
6	6,13	5,95	5,53	6,99	7,39	7,67	5,37	5,73	5,43
7	2,79	2,33	2,71	4,34	3,84	4,18	1,54	1,51	1,24
8	1,21	1,12	0,79	1,98	2,38	2,27	2,02	2,03	2,46
9	1,74	1,38	1,65	3,15	3,16	3,20	1,87	1,34	1,71

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	К			Л			М		
	Выходной параметр оптимизации – интенсивность изнашивания								
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
1	1,12	1,01	0,99	2,00	1,95	1,70	1,15	0,90	0,98
2	3,97	4,18	4,03	8,60	8,00	8,50	6,05	6,30	5,95
3	1,68	1,71	2,07	4,55	4,50	4,70	2,70	2,60	2,55
4	6,49	6,18	6,26	12,10	12,45	12,55	9,70	10,25	9,85
5	1,42	1,15	1,57	3,05	3,40	3,10	1,60	1,65	1,45
6	5,11	5,04	4,46	10,15	9,75	9,60	8,15	7,8	7,65
7	1,84	2,26	1,87	4,95	4,85	4,50	2,20	2,15	2,35
8	2,79	3,17	3,07	7,35	7,95	7,80	4,75	4,85	4,55
9	2,36	2,39	2,12	6,00	6,10	6,35	3,45	3,25	3,40

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Н			О			П		
	Выходной параметр оптимизации – коэффициент трения								
	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
1	0,455	0,422	0,455	0,405	0,422	0,439	0,211	0,178	0,161
2	0,355	0,342	0,345	0,329	0,355	0,332	0,118	0,111	0,131
3	0,572	0,555	0,555	0,539	0,555	0,539	0,245	0,245	0,261
4	0,395	0,409	0,389	0,389	0,382	0,369	0,145	0,151	0,158
5	0,489	0,455	0,472	0,439	0,455	0,455	0,1787	0,211	0,178
6	0,369	0,382	0,372	0,355	0,362	0,355	0,125	0,128	0,138
7	0,372	0,400	0,377	0,344	0,355	0,377	0,145	0,139	0,133
8	0,444	0,422	0,455	0,411	0,433	0,400	0,167	0,178	0,189
9	0,400	0,411	0,377	0,361	0,389	0,394	0,156	0,167	0,156

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Р			С			Т		
	Выходной параметр оптимизации – коэффициент трения								
	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
1	0,145	0,161	0,145	0,172	0,172	0,189	0,155	0,172	0,155
2	0,105	0,111	0,098	0,139	0,142	0,149	0,115	0,129	0,122
3	0,211	0,228	0,228	0,239	0,255	0,239	0,205	0,222	0,205
4	0,125	0,131	0,135	0,172	0,169	0,159	0,135	0,149	0,155
5	0,178	0,178	0,161	0,205	0,189	0,205	0,172	0,172	0,155
6	0,105	0,111	0,118	0,149	0,159	0,152	0,122	0,142	0,129
7	0,122	0,117	0,106	0,166	0,161	0,150	0,139	0,127	0,133
8	0,156	0,145	0,150	0,194	0,183	0,189	0,155	0,161	0,150
9	0,133	0,139	0,122	0,172	0,166	0,161	0,144	0,139	0,139

Продолжение приложения А

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	У			Ф			Х		
	Выходной параметр оптимизации – интенсивность изнашивания								
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
1	1,70	1,48	1,65	2,465	2,51	2,77	0,54	0,49	0,78
2	7,54	7,52	7,32	8,84	8,63	8,90	5,47	4,98	5,33
3	0,30	0,48	0,33	1,20	1,26	0,90	1,13	1,25	1,16
4	5,18	4,47	4,90	6,67	6,08	6,48	6,50	6,12	6,82
5	0,88	1,13	0,99	1,53	1,67	1,30	0,81	0,96	0,84
6	6,02	5,84	5,42	6,88	7,28	7,56	5,26	5,62	5,32
7	2,68	2,22	2,60	4,23	3,73	4,07	1,43	1,40	1,13
8	1,10	1,01	0,68	1,87	2,27	2,16	1,91	1,92	2,29
9	1,63	1,27	1,54	3,04	3,05	3,09	1,76	1,23	1,60

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Ц			Ч			Ш		
	Выходной параметр оптимизации – интенсивность изнашивания								
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
1	1,01	0,9	0,88	1,89	1,84	1,59	1,04	0,79	0,87
2	3,86	4,07	3,92	8,49	7,89	8,39	5,94	6,19	5,84
3	1,57	1,6	1,96	4,44	4,39	4,59	2,59	2,49	2,44
4	6,38	6,07	6,15	11,99	12,34	12,44	9,59	10,14	9,74
5	1,31	1,04	1,46	2,94	3,29	2,99	1,49	1,54	1,34
6	5,00	4,93	4,35	10,04	9,64	9,49	8,04	7,69	7,54
7	1,73	2,15	1,76	4,84	4,74	4,39	2,09	2,04	2,24
8	2,68	3,06	2,96	7,24	7,84	7,69	4,65	4,74	4,44
9	2,25	2,27	2,01	5,89	5,99	6,24	3,34	3,14	3,29

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Щ			Э			Ю		
	Выходной параметр оптимизации – коэффициент трения								
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
1	0,344	0,311	0,314	0,294	0,311	0,328	0,189	0,156	0,139
2	0,244	0,231	0,234	0,218	0,244	0,221	0,096	0,089	0,109
3	0,461	0,444	0,444	0,428	0,444	0,428	0,223	0,223	0,239
4	0,284	0,298	0,278	0,278	0,271	0,258	0,123	0,129	0,136
5	0,378	0,344	0,361	0,328	0,344	0,344	0,156	0,189	0,156
6	0,258	0,271	0,261	0,244	0,251	0,244	0,103	0,106	0,116
7	0,261	0,289	0,266	0,233	0,244	0,266	0,123	0,117	0,111
8	0,333	0,311	0,344	0,300	0,322	0,289	0,145	0,156	0,167
9	0,289	0,300	0,266	0,250	0,278	0,283	0,134	0,145	0,134

Номер опыта	Первая буква фамилии								
	Я								
	Выходной параметр оптимизации – коэффициент трения								
	f_1	f_1	f_1						
1	0,123	0,139	0,123						
2	0,083	0,089	0,076						
3	0,189	0,206	0,206						
4	0,130	0,109	0,113						
5	0,156	0,156	0,139						
6	0,083	0,089	0,096						
7	0,100	0,095	0,084						
8	0,134	0,123	0,129						
9	0,111	0,117	0,100						

Приложение В

Натуральные значения входных (варьируемых) факторов

Последняя цифра шифра	Давление, x_1(р), МПа		Скорость, x_2(р), м/с	
	Нулевой уровень $(x_0)_1$	Интервал варьирования $(\Delta x)_1$	Нулевой уровень $(x_0)_2$	Интервал варьирования $(\Delta x)_2$
1	7,5	2,5	0,14	0,04
2	7	3	0,12	0,03
3	6,5	3,5	0,11	0,04
4	6	4	0,10	0,05
5	5,5	4,5	0,09	0,06
6	5	4	0,08	0,05
7	4,5	3,5	0,07	0,04
8	4	3	0,06	0,05
9	3,5	2,5	0,05	0,04
0	3	2	0,04	0,03

Приложение С – Значение критерия Кохрена G-критерия

Критические значения G-критерия (Кохрена) [6] для уровня значимости α = 0,05 (обычный шрифт) и **α = 0,01 (жирный шрифт)**,чисел степеней свободы $f_1 = n - 1$ и количества выборок f_2

f_1 / f_2	**1**	**2**	**3**
2	0,9985 **0,9999**	0,9750 **0,9950**	0,9392 **0,9794**
3	0,9669 **0,9933**	0,8709 **0,9423**	0,7977 **0,8831**
4	0,9065 **0,9676**	0,7679 **0,8643**	0,6841 **0,7814**
5	0,8412 **0,9279**	0,6838 **0,7885**	0,5981 **0,6957**
6	0,7808 **0,8828**	0,6161 **0,7218**	0,5321 **0,6258**
7	0,7271 **0,8376**	0,5612 **0,6644**	0,4800 **0,5685**
8	0,6798 **0,7945**	0,5157 **0,6152**	0,4377 **0,5209**
9	0,6385 **0,7544**	0,4775 **0,5727**	0,4027 **0,4810**
10	0,6020 **0,7175**	0,4450 **0,5358**	0,3733 **0,4469**

Приложение D

Критические значения t-критерия (Стьюдента). Критические значения t-критерия (Стьюдента) [6] для уровня значимости α = 0,05 (обычный шрифт) и **α = 0,01 (жирный шрифт)** для чисел степеней свободы f_1

α / f_1	0,05	0,01	α / f_1	0,05	0,01
1	12,706	**63,657**	**12**	2,179	**3,055**
2	4,303	**9,925**	**13**	2,160	**3,010**
3	3,182	**5,841**	**14**	2,145	**2,977**
4	2,776	**4,604**	**15**	2,131	**2,950**
5	2,571	**4,032**	**16**	2,120	**2,921**
6	2,447	**3,707**	**17**	2,110	**2,900**
7	2,365	**3,499**	**18**	2,101	**2,878**
8	2,306	**3,355**	**19**	2,093	**2,860**
9	2,262	**3,250**	**20**	2,086	**2,845**
10	2,228	**3,169**	**21**	2,080	**2,830**
11	2,201	**3,110**	**22**	2,074	**2,819**

Приложение E

Критические значения F-распределения (критерия Фишера)

f_1=n-λ / **f_2=n(r-1)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	161 **4052**	200 **4999**	216 **5403**	225 **5625**	230 **5764**	234 **5859**	237 **5928**	161 **4052**
2	18,51 **98,5**	19 **99**	19,16 **99,17**	19,25 **99,25**	19,3 **99,3**	19,33 **99,33**	19,35 **99,36**	18,51 **98,5**
3	10,13 **34,12**	9,55 **30,82**	9,28 **29,46**	9,12 **28,71**	9,01 **28,24**	8,94 **27,91**	8,89 **27,67**	10,13 **34,12**
4	7,71 **21,2**	6,94 **18**	6,59 **16,69**	6,39 **15,98**	6,26 **15,52**	6,16 **15,21**	6,09 **14,98**	7,71 **21,2**
5	6,61 **16,26**	5,79 **13,27**	5,41 **12,06**	5,19 **11,39**	5,05 **10,97**	4,95 **10,67**	4,88 **10,46**	6,61 **16,26**
6	5,99 **13,74**	5,14 **10,92**	4,76 **9,78**	4,53 **9,15**	4,39 **8,75**	4,28 **8,47**	4,21 **8,26**	5,99 **13,74**
7	5,59 **12,25**	4,74 **9,55**	4,35 **8,45**	4,12 **7,85**	3,97 **7,46**	3,87 **7,19**	3,79 **7**	5,59 **12,25**
8	5,32 **11,26**	4,46 **8,65**	4,07 **7,59**	3,84 **7,01**	3,69 **6,63**	3,58 **6,37**	3,5 **6,18**	5,32 **11,26**
9	5,12 **10,56**	4,26 **8,02**	3,86 **6,99**	3,63 **6,42**	3,48 **6,06**	3,37 **5,8**	3,29 **5,61**	5,12 **10,56**
10	4,96 **10,04**	4,1 **7,56**	3,71 **6,55**	3,48 **5,99**	3,33 **5,64**	3,22 **5,39**	3,14 **5,2**	4,96 **10,04**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
11	4,84 **9,65**	3,98 **7,21**	3,59 **6,22**	3,36 **5,67**	3,2 **5,32**	3,09 **5,07**	3,01 **4,89**	4,84 **9,65**
12	4,75 **9,33**	3,89 **6,93**	3,49 **5,95**	3,26 **5,41**	3,11 **5,06**	3 **4,82**	2,91 **4,64**	4,75 **9,33**
13	4,67 **9,07**	3,81 **6,7**	3,41 **5,74**	3,18 **5,21**	3,03 **4,86**	2,92 **4,62**	2,83 **4,44**	4,67 **9,07**
14	4,6 **8,86**	3,74 **6,51**	3,34 **5,56**	3,11 **5,04**	2,96 **4,7**	2,85 **4,46**	2,76 **4,28**	4,6 **8,86**
15	4,54 **8,68**	3,68 **6,36**	3,29 **5,42**	3,06 **4,89**	2,9 **4,56**	2,79 **4,32**	2,71 **4,14**	4,54 **8,68**
16	4,49 **8,53**	3,63 **6,23**	3,24 **5,29**	3,01 **4,77**	2,85 **4,44**	2,74 **4,2**	2,66 **4,03**	4,49 **8,53**
17	4,45 **8,4**	3,59 **6,11**	3,2 **5,18**	2,96 **4,67**	2,81 **4,34**	2,7 **4,1**	2,61 **3,93**	4,45 **8,4**
18	4,41 **8,29**	3,55 **6,01**	3,16 **5,09**	2,93 **4,58**	2,77 **4,25**	2,66 **4,01**	2,58 **3,84**	4,41 **8,29**
19	4,38 **8,18**	3,52 **5,93**	3,13 **5,01**	2,9 **4,5**	2,74 **4,17**	2,63 **3,94**	2,54 **3,77**	4,38 **8,18**
20	4,35 **8,1**	3,49 **5,85**	3,1 **4,94**	2,87 **4,43**	2,71 **4,1**	2,6 **3,87**	2,51 **3,7**	4,35 **8,1**

В таблице даны значения квантилей для α = 0,05 (обычны шрифт) и для **α = 0,01** (**жирный шрифт**) в зависимости от числа степеней свободы f_1 и f_2 (f_1 – число степеней свободы для большей дисперсии, f_2 – число свободы для меньшей дисперсии

Учебное издание

Харламов Павел Викторович
Горин Станислав Леонидович

ТРЕНИЕ И ИЗНОС В МАШИНАХ

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Т.М. Чеснокова

Подписано в печать 29.12.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж экз. Изд. № 901754. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.