РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

А.Л. Озябкин

МЕХАТРОНИКА, ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ CAE СИСТЕМАМИ

Учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ

Ростов н/Д, 2019

УДК 629.4.015: 625.144.5: 681.3.06

Рецензент: Волохов А.С., доцент каф. «Эксплуатация и ремонт машин» ФГБОУ ВО РГУПС

Озябкин, А.Л.

Мехатроника, физико-математическое моделирование и оценка динамики и прочности конструкций CAE системами : учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ / А.Л. Озябкин. – Ростов н/Д, 2019. – 35 с.

Учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых раот содержит примеры расчёта механических систем и оценки их динамических и прочностных характеристик.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов направлений подготовки: 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», профиль «Автомобильный сервис»; «Эксплуатация перегрузочного оборудования портов и транспортных терминалов» (бакалавриат); 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», профиль: «Подъёмно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» (специалитет); 15.03.03 «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» (бакалавриат);
15.04.03 «Прикладная механика», профиль «Динамика и прочность машин» (магистратура).

Одобрены кафедры «Транспортные машины и триботехника»

Оглавление

Задание на курсовую работу 4
Введение 5
1 Расчет настроек регулятора методом расширенных характеристик 6
1.1 П - регулятор........ 7
1.2 ПИ-регулятор........ 8
1.3 ПИД - регулятор 9
Заключение 11
ПРИЛОЖЕНИЕ 12

РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ростовский государственный университет путей сообщения"

(ФГБОУ ВО РГУПС)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
____
____
"___" _________ 20___

Задание на ____________ работу

Кафедра: ____
Специальность: ____
Форма обучения: ____
Дисциплина: Мехатроника, физико-математическое моделирование и оценка динамики и прочности конструкций САЕ системами
Вид работы: ____
Группа: ____
Студент: ____
Тема курсовой работы: Разработка физико-математической модели транспортного средства и механизма управления ею.
Исходные данные: Фрикционно-механическая система транспортного средства описывается передаточной функцией 3 порядка с заданными параметрами типовых элементарных звеньев
$W(s) = k\dfrac{(1+Q_3 s)(1-Q_4 s)(1-Q_5 s)}{(1+T_1 s)\left(1+2\xi_2 T_2 s+T_2^2 s^2\right)}$, где $k = 0{,}065$; $T_1 = 0{,}000173$; $T_2 = 0{,}01$; $\xi_2 = 0{,}744$; $Q_3 = 0{,}00905$; $Q_4 = 0{,}000497$; $Q_5 = 0{,}00966$. Требуется разработать систему автоматического управления последовательного типа, обеспечивающей минимальные значения статической ошибки, времени регулирования и перерегулирования выходной управляемой величины

Руководитель курсовой работы

_____________________________ ____________________

Дата выдачи задания "___" _________ 20 __

Задание получил ____________________

_________________________ "___" _________ 20 __

Введение

Управление - это процесс формирования и реализации управляющих воздействий, направленных на достижение некоторой цели. Такой целью может быть поддержание некоторой физической величины на заданном уровне, изменение некоторого параметра по определенному алгоритму, получение желаемого вида переходных процессов и т.д.

Системой автоматического управления называется совокупность объекта управления и управляющего устройства, взаимодействие которых обеспечивает процесс управления без участия человека. Частным случаем системы автоматического управления является система автоматического регулирования, в которой в качестве управляющего устройства используется регулятор.

Приведём пример автоматической системы регулирования (рис. 1).

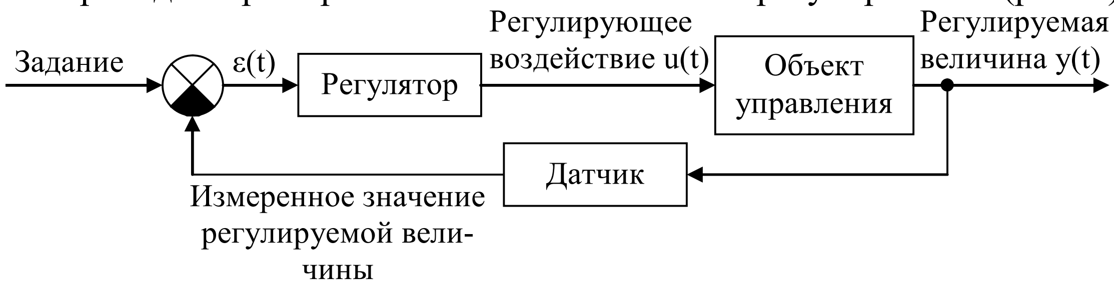


Рис. 1 – Структурная схема САР

При автоматизации объектов управления широко применяют одноконтурные системы управления, обеспечивающие стабилизацию выходных координат объектов. Синтез таких систем предполагает знание статических и динамических характеристик, позволяющих определить структуру регулятора и найти параметры его настройки.

Первый шаг процесса синтеза - определить назначения системы. Второй шаг – это указать те переменные, которые подлежат управлению. На третьем шаге необходимо предъявить требования к точности, после чего следует выбрать конфигурацию системы, которая обладала бы желаемым качеством. Такая конфигурация обычно включает в себя датчик, объект управления, исполнительное устройство и регулятор. Затем нужно составить математическое описание объекта управления. Для этого требуется установить все взаимосвязи между переменными, характеризующими поведение объекта. В качестве описания можно использовать дифференциальные уравнения или передаточные функции. Далее необходимо выбрать регулятор. Выбор типа регулятора может начинаться с простейших двухпозиционных регуляторов и заканчивается самонастраивающимся микропроцессорным регулятором. Заключительный шаг процедуры синтеза состоит в настройке параметров системы, которые обеспечивали бы желаемые показатели качества.

Наибольшее распространение на практике получили электрические регуляторы. Автоматические электрические регуляторы подразделяют на релейно-импульсные, аналоговые и цифровые. В системе автоматического регулирования с П- и ПИ-регуляторами отклонения алгоритмов от идеализированных при определенных условиях не оказывают существенного влияния на результаты параметрического синтеза, и поведение реальной системы с достаточной степенью точности соответствует результатам теоретического описания.

В соответствие с поставленной целью требуется решить следующие задачи:

1) Разработать систему автоматического регулирования (САР) последовательного типа, обеспечивающую минимальные значения статической ошибки, времени регулирования и перерегулирования выходной управляемой величины.

2) Методом анализа дифференциальных уравнений фрикционно-механической системы определить масштабы и критерии динамического подобия.

1 РАСЧЕТ НАСТРОЕК РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ РАСШИРЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Практическое требование к САР, диктуемое свойствами реальных объектов, заключается в том, что автоматическая система регулирования должна обладать определенным запасом устойчивости. Запас устойчивости гарантирует работоспособность системы при отклонениях в некоторых пределах ее параметров и изменении ее характеристик со временем или при изменении режима работы. Требование запаса устойчивости вводит ограничение на область расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы. Для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми (т.е. находились в левой комплексной полуплоскости). Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю, а остальные левые, то система находится на границе апериодической устойчивости. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно сопряженных корней, то система находится на границе колебательной устойчивости. Границей устойчивости замкнутой системы автоматического регулирования является мнимая ось комплексной плоскости. Если в качестве меры запаса устойчивости выбирают степень колебательности m, то границей расположения корней становятся два луча OA и OB, расположенные под углом arctg(m) к мнимой оси (рис. 2).

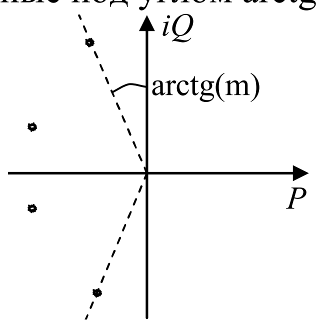


Рис. 2 – Расположение корней характеристического полинома на комплексной плоскости и иллюстрация запаса устойчивости

Обычно в расчётах в качетсве граничных принимают значения степени колебательности m = 0.221 или m = 0.366.

Расчёт САР на заданный запас устойчивости по степени колебательности производится по расширенной амплитудно-фазовой характеристики (РАФХ) разомкнутой системы.

В этом случае критерий запаса устойчивости можно сформулировать следующим образом: если расширенная АФХ устойчивой или нейтральной разомкнутой системы $W_{p.c}(m,i\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ проходит через точку с координатами [-1, i0], не охватывая ее на более низких частотах (рис. 3), то пара комплексно-сопряженных корней будет расположена на лучах, проведенных под углом arctg(m) к мнимой оси в левой полуплоскости, а все остальные корни характеристического уравнения замкнутой системы будут расположеныы левее этих лучей.

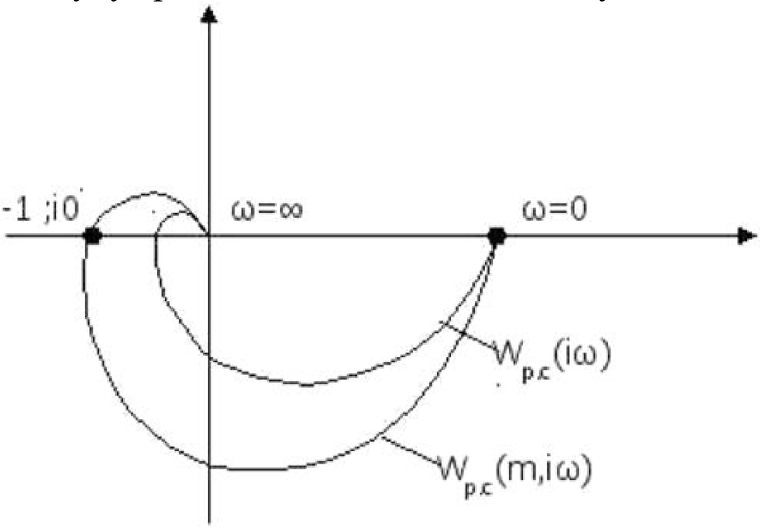


Рис. 3 - Пример годографов АФХ и РАФХ разомкнутой системы.

Этому условию соответствует выражение:

$$W_{p.c}(m,i\omega) = W_{об}(m,i\omega)W_{per}(m,i\omega) = -1,$$

где $W_{p.c}(m,i\omega), W_{об}(m,i\omega), W_{per}(m,i\omega)$ - РАФХ разомкнутой системы разомкнутой системы, объекта и регулятора.

Выполнение этого условия обеспечивается при определенных значениях параметров настройки регуляторов. Поэтому на основании последнего выражени получаются уравнения для определения значений параметров настройки регулятора, при которых обеспечивается заданное ограничение на расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы и, следовательно, заданный запас устойчивости для САР:

$$\begin{cases} A_{об}(m,\omega)\cdot A_{per}(m,\omega) = 1 \\ \varphi_{об}(m,\omega) + \varphi_{per}(m,\omega) = -\pi \end{cases}$$

1.1 П - РЕГУЛЯТОР

П – регулятор имеет один параметр настройки C_1. Его расширенные частотные характеристики совпадают с обычными, т.е.

$$A_П(m,\omega)=C_1$$

$$\varphi_П(m,\omega)=0$$

В этом случае уравнения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}A_{об}(m,\omega)C_1&=1\\ \varphi_{об}(m,\omega)&=-\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_1=\frac{1}{A_{об}(m,\omega_p)},$$

где $\omega_р$ – рабочая частота, определяемая из второго уравнения системы.

1.2 ПИ-РЕГУЛЯТОР

ПИ – регулятор – регулятор с двумя параметрами настроек C_1 и C_0. Его расширенные частотные характеристики выводятся из передаточной функции подстановкой $p=-m\omega+i\omega$:

$$W_{ПИ}(m,i\omega)=C_1+\frac{C_0}{-m\omega+i\omega}=\frac{(C_0-C_1m\omega)+iC_1\omega}{-m\omega+i\omega};$$

$$A_{ПИ}(m,i\omega)=\sqrt{\frac{(C_0-C_1m\omega)+iC_1\omega}{-m\omega+i\omega}};$$

$$\varphi_{ПИ}(m,i\omega)=\mathrm{arctg}\frac{C_1\omega}{C_0-C_1m\omega}-\mathrm{arctg}\frac{1}{-m}=\mathrm{arctg}\frac{C_1\omega}{C_0-C_1m\omega}-\mathrm{arctg}(m)-\frac{\pi}{2}.$$

После подстановки полученных выражений определяются настройки регулятора:

$$C_1=\frac{1}{A_{об}(m,\omega)}\left\{m\cdot\sin\left[-\varphi_{об}(m,\omega)\right]-\cos\left[-\varphi_{об}(m,\omega)\right]\right\};$$

$$C_0=\frac{1}{A_{об}(m,\omega)}\left\{\omega\cdot\sin\left[-\varphi_{об}(m,\omega)\right]\cdot\left(m^2+1\right)\right\}.$$

Если в плоскости параметров C_1, C_0 построить геометрическое место точек, соответствующих определенной степени колебательности m, получим кривую, называемую кривой равной колебательности (рис. 4).

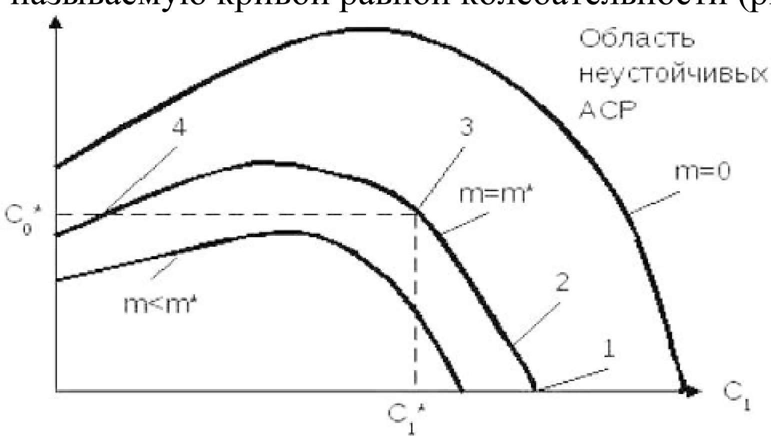


Рис. 4 - Плоскость параметров настроек ПИ – регулятора.

Принимая различные значения m, можно построить семейство кривых равной колебательности, каждая из которых разбивает плоскость параметров на две области: настройки, лежащие под кривой m^*= const, обеспечивает себе степень колебательности, больше m^*. Кривая m = 0 разбивает плоскость параметров настроек регулятора на области устойчивой и неустойчивой работы САР.

Методика расчета опитмальных настроек ПИ – регулятора сводится к следующему:

- расчет расширенных частотных характеристик объекта для заданной степени колебательности m^*;

- расчет и построение криво равно колебательности $m = m^*$ в плоскости параметров C_1 и C_0 по формулам;

- выбор рабочей частоты ω_p и соответствующих ей оптимальных настроек.

1.3 ПИД - РЕГУЛЯТОР

ПИД – регулятор имеет три параметра настроек C_1, C_0, C_2 и поэтому его расчет по методу расширенных частотных характеристик несколько сложнее, чем расчет регуляторов с двумя параметрами.

Расширенные частотные характеристики ПИД – регулятора:

$$W(m,i\omega) = C_1 + C_2(-m\omega + i\omega) + \frac{C_0}{-m\omega + i\omega};$$

$$A(m,\omega) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{U^2 + V^2}{m^2 + 1}};$$

$$\varphi(m,\omega) = \pi + arctg\left(\frac{P}{Q}\right) - arctg(m),$$

где $P = C_1 m\omega - C_0 + C_2\omega^2(1 - m^2)$; $Q = C_1\omega - 2C_2 m\omega^2$.

Решение системы уравнений с учётом последних формул даёт выражения для расчёта настроек ПИД-решулятора:

$$C_0 = \frac{\omega\sqrt{1+m^2}}{A_{об}(m,\omega)}\left(m\cdot\cos\gamma - \sin\gamma\right) + C_2\omega^2\left(1+m^2\right);$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{1+m^2}}{A_{об}(m,\omega)}\cos\gamma + 2C_2 m\omega,$$

где $\gamma = \mathrm{arctg}(m) - \pi - \varphi_{об}(m,\omega)$.

Для ПИД – регулятора вместо плоскости параметров настроек мы имеем трехмерное пространство. В этом случае определение оптимальных настроек производится в следующем порядке.

Задаваясь различными значениями настройки C_2, по последним формулам рассчитываются кривые равной колебальности в плоскости C_1, C_0 (рис. 5). Характер этих кривых аналогичен рассмотренной ранее кривой для ПИ – регулятора, который получается как частный случай из ПИД – регулятора при $C_2 = 0$. Условно оптимальные настройки находятся также как и для ПИ – регулятора.

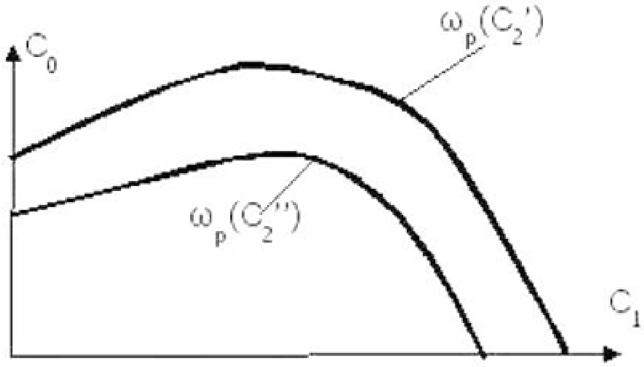


Рис. 5 - Плоскость параметров настроек ПИД – регулятора.

Сравнение между собой оптимальных процессов регулирования дл разных значений C_2 показывает, что введение дифференциальной составляющей в закон регулирования (по сравнению с ПИ – регулятором) существенно улучшает качество переходных процессов. Однако, начиная с некоторых значений C_2, дальнейшее его увеличение малоэффективно, поэтому окончательный выбор оптимального значения C_2^* и соответствующих ему C_1^* и C_0^* должен производиться на основе непосредственного сравнения качества процессов регулирования по интегральному квадратичному критерию.

Расчёт параметров регуляторов и сравнительная оценка частотных и временных характеристик моделируемой системы с регулятором представлена в приложении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая характеристики регуляторов мы приходим к тому, что П-регулятор превосходит ПИ-регулятор по показателям динамической ошибки, степени затухания, кроме того П регулятор наиболее прост конструктивно и дешев, однако он, в отличии от ПИ и ПИД регуляторов, имеет статическую ошибку. Таким образом, П регулятор может использоваться в системах, не требующих точности регулярования.

Если же наличие статической ошибки недопустимо, то необходимо использовать ПИ- или ПИД-регуляторы. Наиболее оптимальным по показателям качества регулирования является ПИД-регулятор, но его следует выбирать в случае крайней необходимости, так как он наиболее сложный по конструкции и дороже в эксплуатации.

Расчёт оптимальных параметров и анализ динамики САР с П-, ПИ-, ПИД-регулятором

$k := 0.065$ $T_1 := 1.73 \cdot 10^{-4}$ $T_2 := 0.01$ $\xi_2 := 0.744$

$Q_3 := 9.05 \cdot 10^{-3}$ $Q_4 := 9.66 \cdot 10^{-3}$ $Q_5 := 4.97 \cdot 10^{-4}$

Передаточная функция объекта регулирования может иметь произвольную структуру. Примем для примера передаточную функцию вида:

$$W_{об}(s) := k \cdot \frac{(Q_3 \cdot s + 1) \cdot (1 - Q_4 \cdot s) \cdot (1 - Q_5 \cdot s)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot \left(T_2{}^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi_2 \cdot T_2 \cdot s + 1\right)}$$

Техническое задание на проектируемый регулятор:

Коэффициент демпфирования переходного процесса: $\psi := 0.9$

Частотный показатель колебательности: $M := 1.548$

Коэффициент демпфирования ψ, корневой m и частотный M показатели запаса устойчивости связаны между собой следующими соотношениями:

$$\Psi mM := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..10 \\ \quad \Psi_i \leftarrow 0.5 + 0.05 \cdot i \text{ if } i < 10 \\ \quad \Psi_i \leftarrow 0.99 \text{ otherwise} \\ \quad m_i \leftarrow \dfrac{\ln(1 - \Psi_i)}{-2 \cdot \pi} \\ \quad M_i \leftarrow \dfrac{1 + (m_i)^2}{2\, m_i} \\ \text{return augment}(\Psi, m, M) \end{array}$$

$\Psi mM =$

	ψ	m	M
	0	1	2
0	0.5	0.11	4.588
1	0.55	0.127	3.998
2	0.6	0.146	3.502
3	0.65	0.167	3.076
4	0.7	0.192	2.705
5	0.75	0.221	2.376
6	0.8	0.256	2.08
7	0.85	0.302	1.807
8	0.9	0.366	1.548
9	0.95	0.477	1.287
10	0.99	0.733	1.049

Самыми распростренными в расчётах и на практике являются коэффициент демпфирования 0,75 и 0,9; реже 0,95. Соответственно для этих значений коэффициента демпфирования расчитывают корневой или частотный показатели колебательности.

Расширенные частотные характеристики

$$W_{\mu}(m, \omega) := W_{об}(s) \text{ substitute}, s = \omega \cdot (-m + i) \rightarrow \frac{0.065 \cdot [0.000497 \cdot \omega \cdot m - (0.000497i) \cdot \omega + 1}{[(0.000173i) \cdot \omega + -0.000173 \cdot \omega \cdot m + 1.0] \cdot [(0.0}$$

$$R_{\mu}(m, \omega) := \operatorname{Re}(W_{\mu}(m, \omega))$$

$$I_{\mu}(m, \omega) := \operatorname{Im}(W_{\mu}(m, \omega))$$

$$A_{\mu}(m, \omega) := \sqrt{R_{\mu}(m, \omega)^2 + I_{\mu}(m, \omega)^2}$$

$$c(m, \omega) := \text{if}(R_{\mu}(m, \omega) \ge 0, 0, -\pi)$$

$$\psi_{\mu}(m, \omega) := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{\mu}(m, \omega)}{R_{\mu}(m, \omega)}\right)$$

Логарифмический декремент затухания

$$m := \frac{-\ln(1 - \psi)}{2 \cdot \pi} = 0.366$$

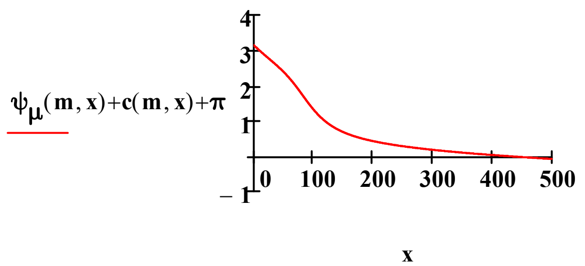
Тогда $\psi := 1 - e^{-2\pi \cdot m} = 0.9$

Расширенные частотные характеристики

Конечное значение частоты ω для расчёта линий m = const в САР

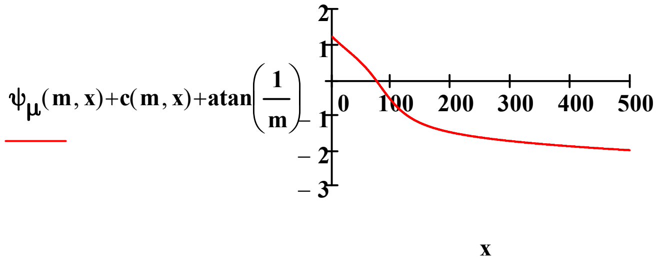
Конечное значение частоты ω_{π} для расчёта линий m = const в САР с **П- и ПИ-регуляторами** определяется решением уравнения:

$$x := 0, 0.01 .. 500$$



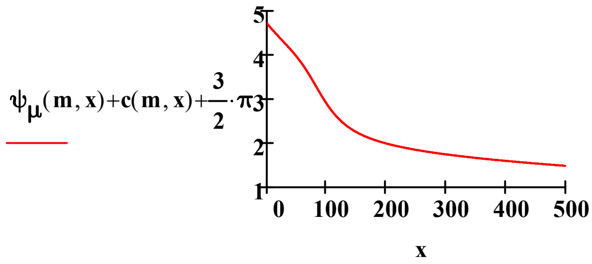
$$\omega_0 := 400 \qquad \omega_{\pi} := \operatorname{root}\left(\psi_{\mu}(m, \omega_0) + c(m, \omega_0) + \pi, \omega_0\right) = 423$$

И-регулятором:



$\omega_0 := 10$ $\qquad \omega_1 := \mathrm{root}\left(\psi_\mu(m, \omega_0) + \mathrm{atan}\left(\frac{1}{m}\right), \omega_0\right) = 73.3$

ПИД-регулятором:



$$\omega_{пид} := 0 \quad \text{on error} \quad \mathrm{root}\left(\psi_\mu(m, \omega_0) + c(m, \omega_0) + \frac{3}{2}\cdot\pi, \omega_0\right) = 3995.9$$

Линейный и логарифмический вектор данных

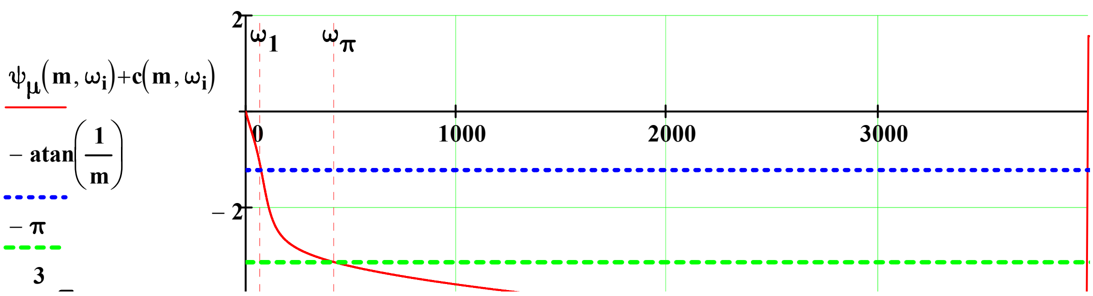
$$\mathrm{linspace}(x1, x2, n) := \begin{array}{|l} d \leftarrow x2 - x1 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \begin{array}{|l} f_i \leftarrow x1 + i\cdot\frac{d}{n-1} \quad \text{if } n > 0 \\ f_i \leftarrow x1 \quad \text{otherwise} \end{array} \\ \text{return } f \end{array}$$

$$\mathrm{logspace}(d1, d2, n) := \begin{array}{|l} d2 \leftarrow \log(d2) \quad \text{if } d2 = \pi \\ x \leftarrow \mathrm{linspace}(d1, d2, n) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad f_i \leftarrow 10^{x_i} \\ \text{return } f \end{array}$$

Оценка частотного диапазона для последующих расчётов производится по графику расширенной фазочастотной характеристики объекта (рис. 1)

$n := 5000$ $\qquad \omega := \mathrm{logspace}(-1, 4, n)$ $\qquad i := 0..n-1$

Конечное значение частоты ω для расчёта линий m = const в САР



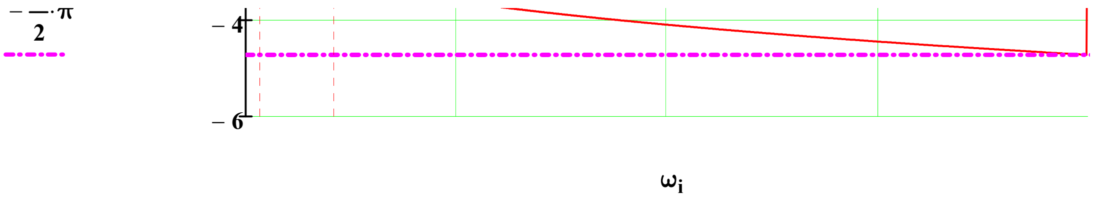


Рис. 1 - Конечное значение частоты ω_π для расчёта линий m = const в САР

1 Оптимальная настройка П-регулятора

Оптимальным является максимальное, удовлетворяющее заданному запасу устойчивости, значение коэффициента передачи:

$$k_{\text{П}} := \frac{1}{A_\mu(m, \omega_\pi)} = 13.46$$

1 Оптимальная настройка П-регулятора

2 Оптимальные настройки ПИ-регулятора по частотному показателю колебательности М

Оценка частотного диапазона по фазовой частотной характеристике объекта:

$$F(\omega, M) := -\frac{\omega}{\left|W_\mu(0,\omega)\right|}\cdot\frac{M}{M^2-1}\cdot\left(M\cdot\sin\left(\arg\left(W_\mu(0,\omega)\right)\right)+1\right)$$

$\omega_0 := 100$

$$\omega_M := \operatorname{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}F(\omega_0, M), \omega_0\right) = 112.701$$

$$k_{\text{пиМ}} := -\frac{M^2\cdot\cos\left(\arg\left(W_\mu(0,\omega_M)\right)\right)}{\left(M^2-1\right)\cdot\left|W_\mu(0,\omega_M)\right|} = 5.61$$

$$T_{\text{пиМ}} := \frac{k_{\text{пиМ}}}{F(\omega_M, M)} = 7.37\times 10^{-3}$$

2 Оптимальные настройки ПИ-регулятора по частотному показателю колебательности М

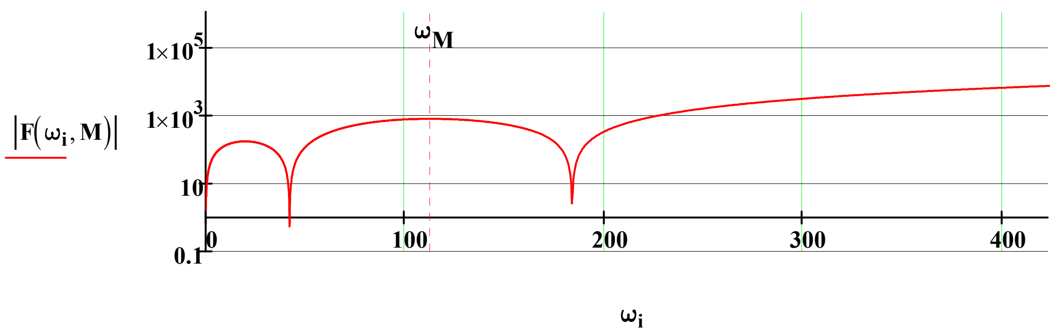


Рис. 2 - Линия настройки заданного частотного показателя колебательности $M = 1.548$ для объек с регулятором; $k_{пиМ} = 5.61$; $T_{пиМ} = 7.37 \times 10^{-3}$

3 Расчёт линий m = const для САР с ПИ-регулятором

Передаточная функция идеального ПИ-регулятора:

$$W_{пи}(s) = k_p + \frac{k_p}{T_и \cdot s} = k_p + \frac{k_и}{s} \qquad k_и = \frac{k_p}{T_и}$$

Вывод формул для расчёта линий m = const

$$W_\mu(-\mu\cdot\Omega + i\cdot\Omega)\cdot W_p(-\mu\cdot\Omega + i\cdot\Omega) + 1 = 0$$

Выделить действительную и мнимую части и умножить на комплексно сопряжённую дробь.
Затем в меню Символьные операции выбрать команду Упростить.

$$\left(Re_\mu + i\cdot Im_\mu\right)\cdot\left[k_p + \frac{k_и}{(-\mu\cdot\Omega + i\cdot\Omega)}\cdot\frac{(-\mu\cdot\Omega - i\cdot\Omega)}{(-\mu\cdot\Omega - i\cdot\Omega)}\right] + 1 = 0$$

Результат выполнения команды Упростить:

$$\frac{\left(Re_\mu + i\cdot Im_\mu\right)\cdot\left(k_и + \Omega\cdot i\cdot k_p - \Omega\cdot k_p\cdot\mu\right)}{\Omega\cdot(i-\mu)} + 1 = 0$$

Результат выполнения команды Факторизовать:

$$\frac{\Omega\cdot i - \Omega\cdot\mu + k_и\cdot Re_\mu + i\cdot k_и\cdot Im_\mu + \Omega\cdot i^2\cdot k_p\cdot Im_\mu + \Omega\cdot i\cdot k_p\cdot Re_\mu - \Omega\cdot k_p\cdot\mu\cdot Re_\mu - \Omega\cdot i\cdot k_p\cdot\mu\cdot Im_\mu}{\Omega\cdot(i-\mu)} =$$

Введём блок решения и выделим действительную и мнимую части числителя

Given

$$-\Omega\cdot\mu + k_и\cdot Re_\mu - \Omega\cdot k_p\cdot Im_\mu - \Omega\cdot k_p\cdot\mu\cdot Re_\mu = 0$$

$$\Omega + k_и\cdot Im_\mu + \Omega\cdot k_p\cdot Re_\mu - \Omega\cdot k_p\cdot\mu\cdot Im_\mu = 0$$

$$\mathrm{Find}\left(k_p, k_и\right)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{Re_\mu + \mu\cdot Im_\mu}{Re_\mu^{\,2} + Im_\mu^{\,2}} \\ -\dfrac{\Omega\cdot Im_\mu\cdot\left(\mu^2 + 1\right)}{Re_\mu^{\,2} + Im_\mu^{\,2}} \end{bmatrix}$$

Формулы, определяющие линию m = const:

$$k_p(m,\omega) := \left| \begin{array}{l} k(m,\omega) \leftarrow -\dfrac{R_\mu(m,\omega) + m \cdot I_\mu(m,\omega)}{R_\mu(m,\omega)^2 + I_\mu(m,\omega)^2} \\ \text{return } \text{if}(k(m,\omega) > 0, k(m,\omega), 0) \end{array} \right.$$

$$k_и(m,\omega) := \left| \begin{array}{l} k(m,\omega) \leftarrow -\dfrac{\omega \cdot I_\mu(m,\omega) \cdot (m^2+1)}{R_\mu(m,\omega)^2 + I_\mu(m,\omega)^2} \\ \text{return } \text{if}(k(m,\omega) > 0, k(m,\omega), 0) \end{array} \right.$$

3 Расчёт линий m = const для САР с ПИ-регулятором

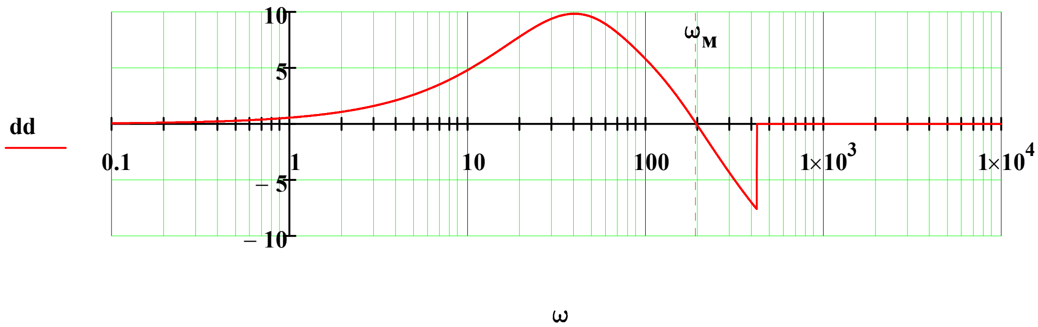
4 Оптимальные настройки ПИ-регулятора

Минимуму линейного критерия I_1 и минимуму дисперсии сигнала рассогласования при низкочастотном возмущении отвечают настройки, соответствующие максимуму на линии m = const. Этой точке отвечает частота $\omega_м$ и настройки идеального ПИ-регулятора:

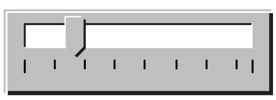
$$dd := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad x_i \leftarrow k_и(m, \omega_i) \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad z_i \leftarrow \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\omega_i - \omega_{i-1}} \\ \text{return } z \end{array} \right.$$

$\omega_0 := 50$

$$\omega_м := \text{root}\left(\frac{d}{d\omega_0} k_и(m, \omega_0), \omega_0\right) = 193.417$$



$\omega_м :=$

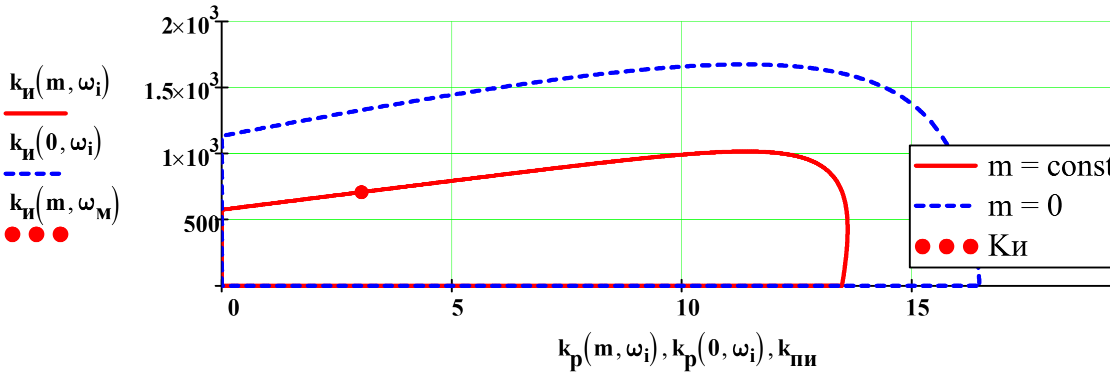


$\omega_м = 92$

$k_{пи} := k_р(m, \omega_м) = 3.03$ Коэффициент усиления ПИ-регулятора

$T_{пи} := \dfrac{k_{пи}}{k_и(m, \omega_м)} = 4.277 \times 10^{-3}$ Постоянная вемени интегрирования ПИ-регулятора

4 Оптимальные настройки ПИ-регулятора



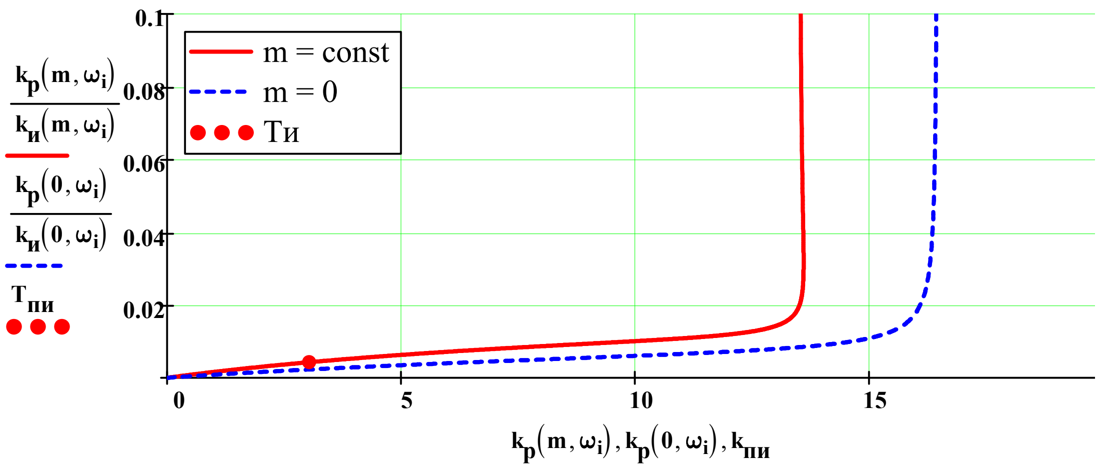


Рис. 3 - Графики линий требуемого коэффициента демпфирования $\psi = 0.9$ для ПИ-регулятора: а зависимость коэф. интегратора от статического коэффициента; **б** - зависимость постоянной време интегрирования от статического коэффициента

оптимальные настройки: $k_{пи} = 3.03$; $T_{пи} = 0.004277$

при заданном $M = 1.548$ частотном показателе колебательности: $k_{пиM} = 5.61$; $T_{пиM} = 0.0073$

5 Оценка запаса устойчивости при оптимальных настройках по значению частотного показателя колебате

В системе 2-го порядка корневой m и частотный M показатели запаса устойчивости однозначно связаны:
m = 0.477 соответствует M = 1.29.
m = 0.366 соответствует M = 1.55;

m = 0.221 соответствует M = 2.38.
В системах выше второго порядка соответствие соблюдается приближённо.
В САР с П-регулятором мера запаса устойчивости - относительный максимум АЧХ.

Комплексные частотные характеристики регулятора и замкнутой САР по каналу **управляющего воздействия**:

$$W_p(\omega, k_p, T_и, T_д) := \begin{array}{|l} x \leftarrow k_p \\ x \leftarrow x + \dfrac{k_p}{T_и \cdot \omega \cdot i} \quad \text{if } T_и \neq \infty \\ x \leftarrow x + k_p \cdot T_д \cdot \omega \cdot i \quad \text{if } T_д \neq 0 \\ \text{return } x \end{array}$$

$$W_{uy}(\omega, k_p, T_и, T_д) := \frac{W_\mu(0,\omega) \cdot W_p(\omega, k_p, T_и, T_д)}{1 + W_\mu(0,\omega) \cdot W_p(\omega, k_p, T_и, T_д)}$$

Комплексные частотные характеристики регулятора и замкнутой САР по каналу **регулирющего воздействия**:

$$W_{\mu y}(\omega, k_p, T_и, T_д) := \frac{W_\mu(0,\omega)}{1 + W_\mu(0,\omega) \cdot W_p(\omega, k_p, T_и, T_д)}$$

Резонансная частота и частотный показатель колебательности определяется решением уравнений:
- для САР с П-регулятором:

$$\omega_0 := 400 \qquad \Omega_п := \text{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}\left|W_{uy}(\omega_0, k_п, \infty, 0)\right|, \omega_0\right) = 453.795$$

$$M_п := \frac{\left|W_{uy}(\Omega_п, k_п, \infty, 0)\right|}{\left|W_{uy}(0.001, k_п, \infty, 0)\right|} = 9.71$$

- для САР с ПИ-регулятором:

$$\omega_0 := 100 \qquad \Omega_{пи} := \text{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}\left|W_{uy}(\omega_0, k_{пи}, T_{пи}, 0)\right|, \omega_0\right) = 88.923$$

$$M_{пи} := \left|W_{uy}(\Omega_{пи}, k_{пи}, T_{пи}, 0)\right| = 1.51$$

- для САР с ПИ-регулятором и для заданного показателя колебаткльности $M = 1.548$:

$$\omega_0 := 100 \qquad \Omega_{пиM} := \text{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}\left|W_{uy}(\omega_0, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)\right|, \omega_0\right) = 112.701$$

$$M_{пиM} := \frac{\left|W_{uy}(\Omega_{пиM}, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)\right|}{\left|W_{uy}(0.001, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)\right|} = 1.548$$

Амплитудно-частотные характеристики замкнутой САР с П- и ПИ- регуляторами при оптимальных настройках показаны на рис. 3.

$$W_{пи}(\omega) := W_{uy}(\omega, k_{пи}, T_{пи}, 0)$$

$$W_{п}(\omega) := W_{uy}(\omega, k_{п}, \infty, 0) \qquad W_{M}(\omega) := W_{uy}(\omega, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)$$

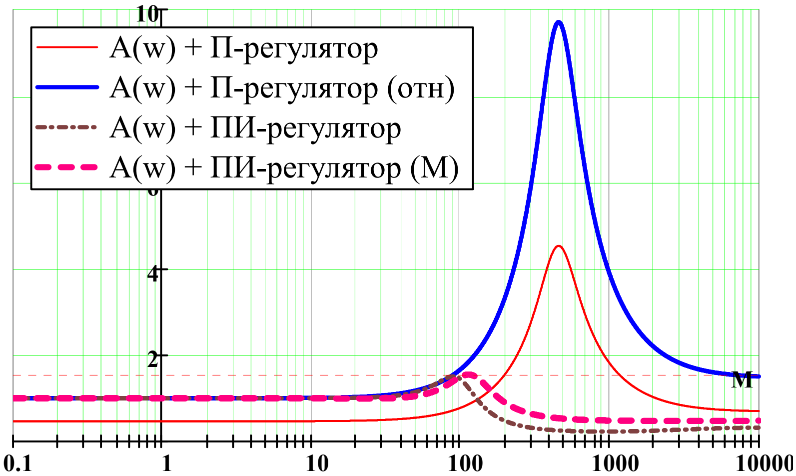
5 Оценка запаса устойчивости при оптимальных настройках по значению частотного показателя колебате

$\left|W_{uy}(\omega_i, k_п, \infty, 0)\right|$

$\dfrac{\left|W_{uy}(\omega_i, k_п, \infty, 0)\right|}{\left|W_{uy}(0.001, k_п, \infty, 0)\right|}$

$\left|W_{uy}(\omega_i, k_{пи}, T_{пи}, 0)\right|$

$\left|W_{uy}(\omega_i, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)\right|$

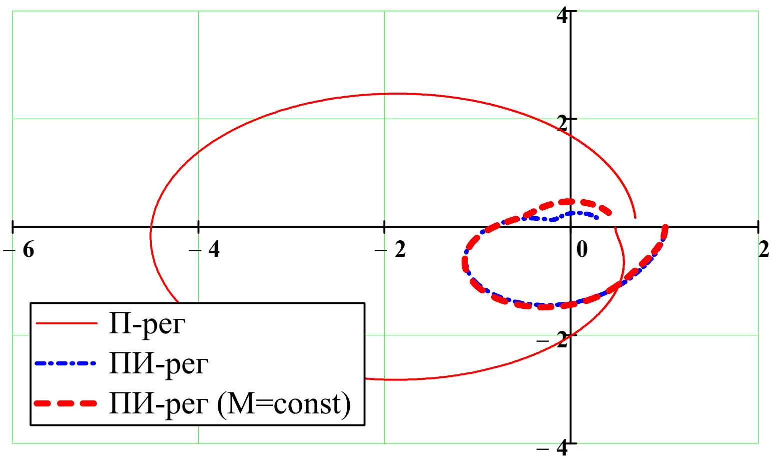


ω_i

$Im(W_п(\omega_i))$

$Im(W_{пи}(\omega_i))$

$Im(W_M(\omega_i))$



$Re(W_п(\omega_i)), Re(W_{пи}(\omega_i)), Re(W_M(\omega_i))$

Рис. 4 - АЧХ и АФЧХ управляемого объекта с П- и ПИ-регуляторами

1 - приближённой настройки П-регулятора:

Показатель колебательности: $M_п = 9.706$

2 - приближённой настройки ПИ-регулятора:

Показатель колебательности: $M_{пи} = 1.506$

3 - настройки ПИ-регулятора при заданном $M = 1.548$:

Показатель колебательности: $M_{пиM} = 1.548$

Из анализа частотных характеристик видно, что ПИ-регулятор с настройками по 3-му варианту отвечают условиям технического задания.

6 Переходные процессы, значения линейного интегрального критерия качества и прямые показатели каче

Расчёт переходных процессов, значений линейного интегрального критерия качества и прямых показателей качества в САР с П- и ПИ-регуляторами

5.1 Переходные процессы при возмущении по каналу управляющего воздействия **u(t) = 1(t)**:

$t_{end} := 0.15$ $\qquad$ $t := 0, 0.001 .. t_{end}$

$$h_y(t, k_p, T_и, T_д) := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_{пид}} \mathrm{Re}\left(W_{uy}(\omega, k_p, T_и, T_д)\right) \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega}\, d\omega$$

Равновесное значение в САР с П-регулятором

$$h_{уст} := \left|W_{uy}(0.001, k_п, \infty, 0)\right| = 0.467$$

Статическая ошибка в САР с П-регулятором

$$\Delta_c := 1 - h_{уст} = 0.533$$

Оценка линейного интегрального критерия качества I_1 в САР с П-регулятором

$$I_{1пу} := \int_0^{t_{end}} 1 - h_y(t, k_п, \infty, 0)\, dt = 0.084$$

с ПИ-регулятором:

$$I_{1пиу} := \int_0^{t_{end}} 1 - h_y(t, k_{пи}, T_{пи}, 0)\, dt = 0.022$$

с ПИ-регулятором при заданном частотном показателе колебательности $M = 1.548$:

$$I_{1пиуM} := \int_0^{t_{end}} 1 - h_y(t, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)\, dt = 0.02$$

5.2 по каналу регулирующего воздействия

$$h_p(t, k_p, T_и, T_д) := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\omega_{пид}} Re\left(W_{\mu y}(\omega, k_p, T_и, T_д)\right)\cdot\frac{\sin(\omega\cdot t)}{\omega}\,d\omega$$

Статическая ошибка в САР с П-регулятором $\Delta := \left|W_{\mu y}(0.001, k_п, \infty, 0)\right| = 0.035$

Оценка линейного интегрального критерия качества в САР
с П-регулятором

$$I_{1пр} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_п, \infty, 0)\,dt = 4.893\times 10^{-3}$$

с ПИ-регулятором: $I_{1пи}(k_и) := k_и^{-1}$

$$I_{1пир} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{пи}, T_{пи}, 0)\,dt = 1.4\times 10^{-3} \qquad I_{1пи}(k_и(m, \omega_м)) = 1.4\times 10^{-3}$$

Здесь мы видим, что экспериментальные значения интегральной ошибки $I_{1пир} = 1.389\times 10^{-3}$ овпали с теоретически заданной величиной, обратно пропорциональной коэффицинту усиления интегратора.

с ПИ-регулятором при заданном частотном показателе колебательности $M = 1.548$:

$$I_{1пирM} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{пиM}, T_{пиM}, 0)\,dt = 1.3\times 10^{-3}$$

Расчёт времени, соответствующего первому и второму максимумам переходного процесса, и значений максимумов
в САР с П-регулятором:

$$\tau := 0.01 \quad \tau_1 := root\left(\frac{d}{d\tau}h_p(\tau, k_п, \infty, 0), \tau\right) = 0.01 \qquad h_1 := h_p(\tau_1, k_п, \infty, 0) = 0.105$$

$$\tau := 0.025 \quad \tau_2 := root\left(\frac{d}{d\tau}h_p(\tau, k_п, \infty, 0), \tau\right) = 0.0253 \qquad h_2 := h_p(\tau_2, k_п, \infty, 0) = 0.041$$

Степень затухания: $\psi_п := 1 - \frac{h_2 - \Delta}{h_1 - \Delta} = 0.91$

в САР с ПИ-регулятором:

$$\tau := 0.02 \quad \tau_3 := root\left(\frac{d}{d\tau}h_p(\tau, k_{пи}, T_{пи}, 0), \tau\right) = 0.0243 \qquad h_3 := h_p(\tau_3, k_{пи}, T_{пи}, 0) = 0.08$$

$$\tau := 0.09 \quad \tau_4 := root\left(\frac{d}{d\tau}h_p(\tau, k_{пи}, T_{пи}, 0), \tau\right) = 0.1 \qquad h_4 := h_p(\tau_4, k_{пи}, T_{пи}, 0) = 6.624\times$$

Степень затухания: $\psi_{пи} := 1 - \frac{h_4}{h_3} = 0.917$

в САР с ПИ-регулятором при заданном частотном показателе колебательности $M = 1.548$:

$\tau := 0.021$ $\tau_5 := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\tau}h_p(\tau, k_{пиM}, T_{пиM}, 0), \tau\right) = 0.0211$ $h_5 := h_p(\tau_5, k_{пиM}, T_{пиM}, 0) =$

$\tau := 0.079$ $\tau_6 := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\tau}h_p(\tau, k_{пиM}, T_{пиM}, 0), \tau\right) = 0.0809$ $h_6 := h_p(\tau_6, k_{пиM}, T_{пиM}, 0) =$

Степень затухания: $\psi_{пиM} := 1 - \frac{h_6}{h_5} = 0.934$

6 Переходные процессы, значения линейного интегрального критерия качества и прямые показатели каче

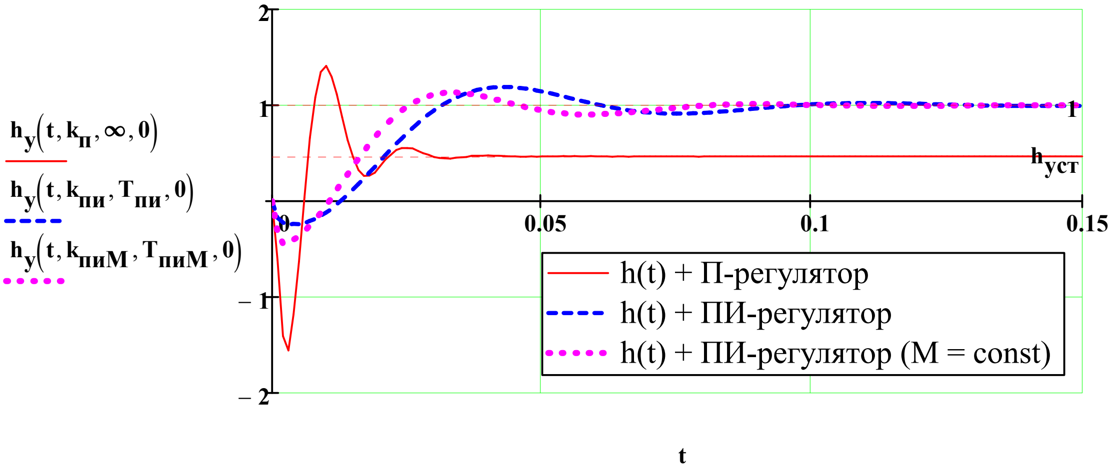


Рис. 5 - Переходные функции САР с П- и ПИ-регуляторами по каналу управляющего воздействия

П-регулятор:

Статическая ошибка в САР $\Delta_c = 0.533$

Линейный интегральный критерий качества $I_{1пу} = 0.084$

ПИ-регулятор:

Линейный интегральный критерий качества $I_{1пиу} = 0.022$

ПИ-регулятор при заданном $M = 1.548$

Линейный интегральный критерий качества $I_{1пиуM} = 0.02$

Из анализа переходных характеристик объекта с регулятором видно, что П-регулятор реализуе значительные амплитуды отклонения от установившейся амплитуды с минимальным временем регулирования, примерно равным 0,04 с, и статичесекой ошибкой. Наилучшие характеристики им ПИ-регулятор по 3 варианту расчёта, так как обеспечивает требования технического задания и им наименьшую ошибку управления $I_{1пиуM} = 0.02$.

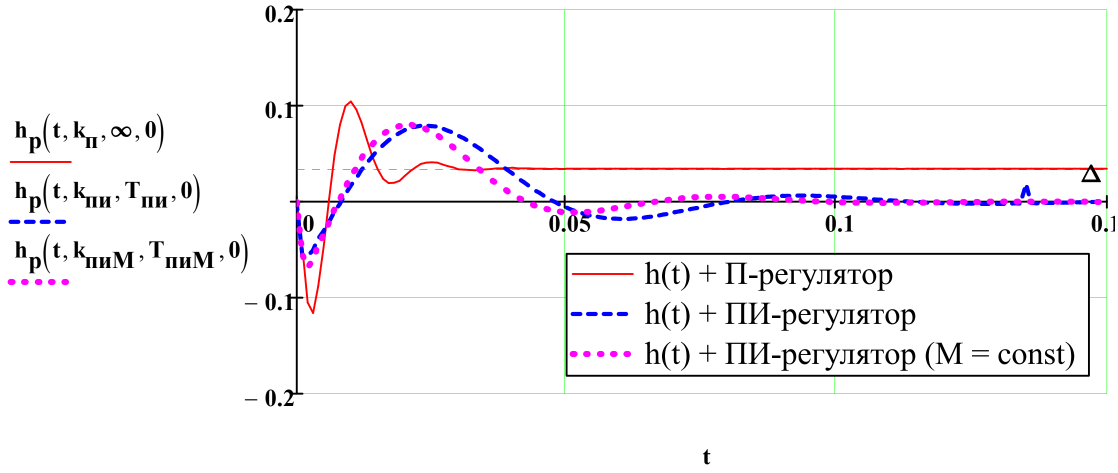


Рис. 6 - Переходные функции САР с П- и ПИ-регуляторами по каналу регулирующего воздействия

П-регулятор:

Статическая ошибка в САР $\Delta = 0.035$

Линейный интегральный критерий качества $I_{1пр} = 0.004893$

Степень затухания $\psi_п = 0.909$

ПИ-регулятор:

Линейный интегральный критерий качества $I_{1пир} = 0.001389$

Степень затухания $\psi_{пи} = 0.917$

ПИ-регулятор при заданном $M = 1.548$

Линейный интегральный критерий качества $I_{1пирM} = 0.00131$

Степень затухания $\psi_{пиM} = 0.934$

Вывод: Степень затухания близка к заданной $\psi = 0.9$. Наиболее быстродействующей системой следует считать 3-ий вариант расчёта, так как имеет минимальную ошибку и время регулирования

7 Расчёт настроек идеального ПИД-регулятора

7.1 Расчёт линий m = const в плоскости параметров ПИД-регулятора

Передаточная функция идеального ПИД-регулятора ($\alpha = \dfrac{T_д}{T_и}$):

$$W_p(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_и \cdot s} + T_д \cdot s\right) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_и \cdot s} + \alpha \cdot T_и \cdot s\right)$$

Расчётные формулы, определяющие в плоскости параметров регулятора линию m = const

а) вспомогательные соотношения

$$A_0(m, \omega) := -\left[I_\mu(m, \omega) \cdot \frac{m}{\omega \cdot (1 + m^2)} + \frac{R_\mu(m, \omega)}{\omega \cdot (1 + m^2)}\right]$$

$$A_1(m, \omega) := I_\mu(m, \omega)$$

$$A_2(\alpha, m, \omega) := R_\mu(m, \omega)\cdot\alpha\cdot\omega - I_\mu(m, \omega)\cdot\alpha\cdot\omega\cdot m$$

б) расчётные формулы:

$$T_{ид}(\alpha, m, \omega) := -\frac{A_1(m, \omega) + \sqrt{A_1(m, \omega)^2 - 4\cdot A_2(\alpha, m, \omega)\cdot A_0(m, \omega)}}{2\cdot A_2(\alpha, m, \omega)}$$

$$k_{ид}(\alpha, m, \omega) := \left| \begin{array}{l} k(m, \omega) \leftarrow \dfrac{1}{\omega\cdot T_{ид}(\alpha, m, \omega)^2\cdot\alpha\cdot\left(m\cdot R_\mu(m, \omega) + I_\mu(m, \omega)\right) - T_{ид}(\alpha, m, \omega)\cdot 1} \\ \quad + \dfrac{m\cdot R_\mu(m, \omega) - I_\mu(m, \omega)}{\omega\cdot\left(m^2 + 1\right)} \\ \text{return if}(k(m, \omega) > 0, k(m, \omega), 0) \end{array} \right.$$

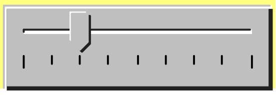
$$k_{рд}(\alpha, m, \omega) := \left| \begin{array}{l} k(\alpha, m, \omega) \leftarrow k_{ид}(\alpha, m, \omega)\cdot T_{ид}(\alpha, m, \omega) \\ \text{if}[(k(\alpha, m, \omega) > 0), k(\alpha, m, \omega), 0] \end{array} \right.$$

$$k_д(\alpha, m, \omega) := \alpha\cdot k_{рд}(\alpha, m, \omega)\cdot T_{ид}(\alpha, m, \omega)$$

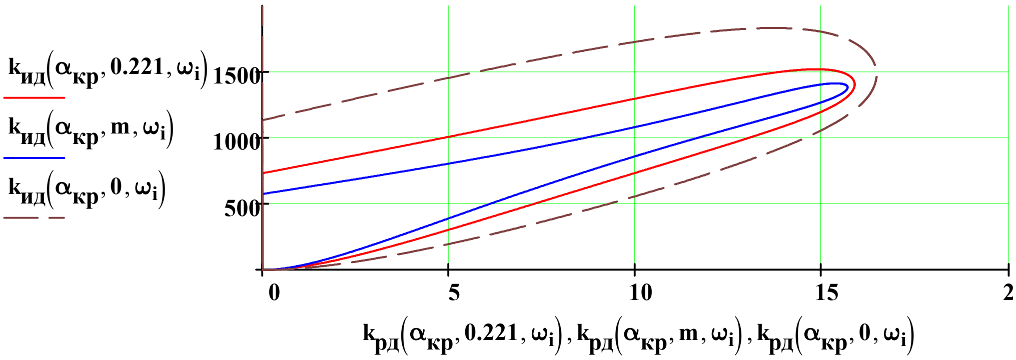
7 Расчёт настроек идеального ПИД-регулятора

Робастное управление - совокупность методов теории управления, целью которых является синтез такого регулятора, который обеспечивал бы хорошее качество управления (к примеру, запасы устойчивости), если объект управления отличается от расчётного или его математическая модель неизвестна.
Таким образом, **робастность** означает малое изменение выхода замкнутой системы управления при малом изменении параметров объекта управления.
Системы, обладающие свойством робастности, называются робастными (грубыми) системами.
Обычно робастные контроллеры применяются для управления объектами с неизвестной или неполной математической моделью, и содержащими неопределённости.

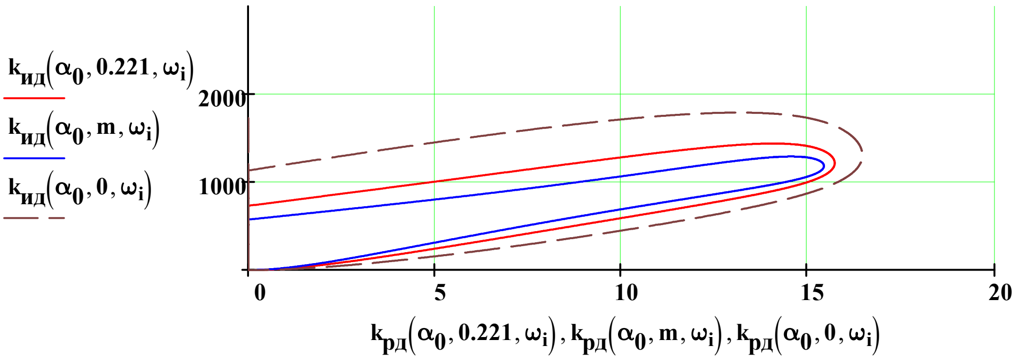
$\alpha_{кр} :=$



$$\alpha_{кр} := 0.001\cdot\alpha_{кр} = 0.04$$



$\alpha_0 := 0.8 \cdot \alpha_{кр}$



$\alpha_1 := 1.2 \cdot \alpha_{кр} = 0.05$

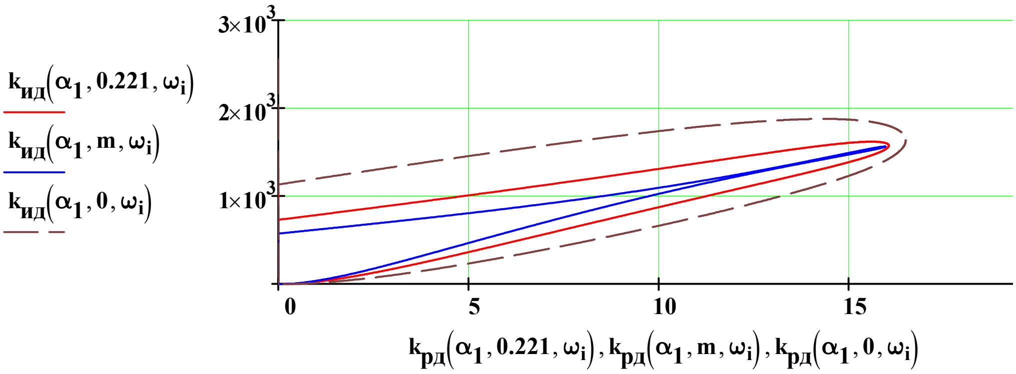


Рис. 7 - Результаты расчёта линий m = const, характеризующих влияние α на качество и робастность САР с ПИД-регулятором

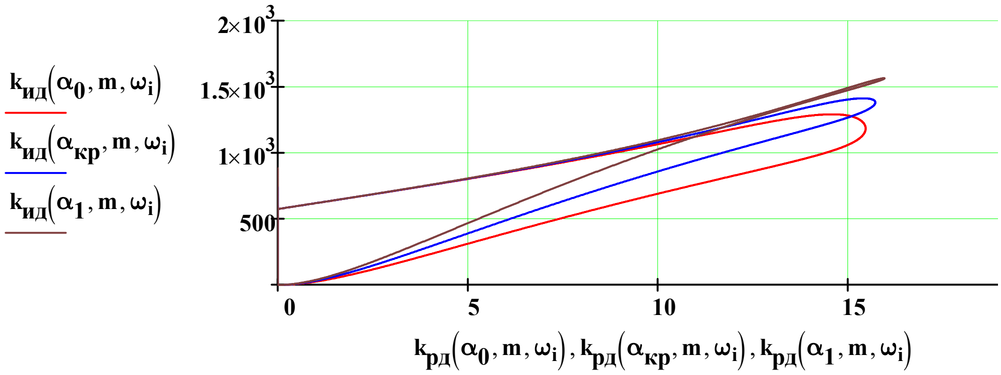


Рис. 8 - Семейство линий m = const для значений $\alpha_0 = 0.032$; 0,4; $\alpha_{кр} = 0.04$ (критическое значение) и $\alpha_1 = 0.05$ позволяет оценить влияние α на качество САР

Максимум $k_и$ (минимум линейного интегрального критерия качества) достигается при $\alpha_{кр}$.
При уменьшении α качество САР и чувствительность к вариациям параметров снижаются.

При настройках, соответствующих точке $(k_и)_{max}$ при $\alpha_{кр}$:
1) достигается максимальное качество САР по линейному интегральному критерию

$$k_и = [\,(k_и)_{max}\,]_{max};$$

2) характеристическое уравнение замкнутой САР имеет пару комплексно-сопряжённых корней кратности 2, что обусловливает особый характер переходных процессов в САР;
3) нарушается примерное соответствие между показателями запаса устойчивости m, M и степенью затухания ψ;
4) САР становится максимально чувствительной к вариациям параметров объекта и регулятора;
5) В силу особенностей динамики и высокой чувствительности к вариациям параметров САР с настройками в точке $(k_и)_{max}$ при $\alpha_{кр}$ не удовлетворяет практическим требованиям.

Варианты решения проблемы:
1) настройка по условию $(k_и)_{max}$ при малых значениях $\alpha = (0.3...0.5)\alpha_{кр}$;
2) компромиссная робастная настройка, соответствующая точке на нижней ветви линии m = 0.366 при $\alpha_{кр}$ в "центре" области заданного запаса устойчивости m = 0.221.

7.2 Расчет значений параметров настройки ПИД-регулятора
Для определения настроек ($\alpha \le \alpha_{кр}$), обеспечивающих минимум интегрального линейного критерия качества, рассчитывается частота в точке $(k_и)_{max}$ и соответствующие найденному значению $\omega_м$ настройки.
Приближённая оценка $\omega_м$ для $m = 0.366$ производится по графику рис. 9.

$\Omega := 100$

$$\omega_e := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\Omega}k_{ид}(\alpha_{кр}, m, \Omega), \Omega\right) = 364.9$$

$\Omega := 0, 0.01 .. \omega_e$

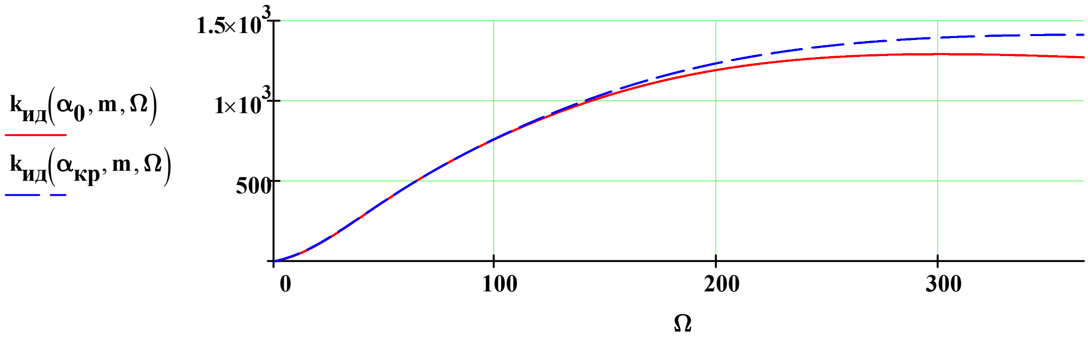


Рис. 6 Приближённая оценка $\omega_м$ для требуемой относительной степени затухания $\mathbf{m = 0.366}$ и ПИД-регулятора

Настройка частотного показателя колебательности при робастной настройке:

$\mathbf{R :=}$

$$0.01 \cdot R = 0.69$$

8 Расчёт настроек идеального ПИД-регулятора

Приближённая оценка параметров ПИД-регулятора по максимуму коэффициента интегратора

$$\omega_0 := 0.3 \cdot \omega_e$$

$$\omega_{мд}(\alpha) := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\omega_0} k_{ид}(\alpha, m, \omega_0), \omega_0\right)$$

$$\Omega_1 := \omega_{мд}(\alpha_0) = 300.514 \qquad \Omega_2 := \omega_{мд}(\alpha_{кр}) = 364.903$$

$$k_{и1} := k_{ид}(\alpha_0, m, \Omega_1) = 1293.077 \qquad k_{и2} := k_{ид}(\alpha_{кр}, m, \Omega_2) = 1414.069$$

$$k_{р1} := k_{рд}(\alpha_0, m, \Omega_1) = 14.551 \qquad k_{р2} := k_{рд}(\alpha_{кр}, m, \Omega_2) = 15.361$$

$$T_{и1} := \frac{k_{р1}}{k_{и1}} = 0.01125 \qquad T_{и2} := \frac{k_{р2}}{k_{и2}} = 0.01086$$

$$T_{д1} := \alpha_0 \cdot T_{и1} = 3.6 \times 10^{-4} \qquad T_{д2} := \alpha_{кр} \cdot T_{и2} = 4.3 \times 10^{-4}$$

Компромиссная робастная настройка, соответствующая точке на нижней ветви линии $\mathbf{m = 0.366}$ и $\alpha_{кр}$, $k_и$ ~ 0.14 в "центре" области заданного запаса устойчивости для m = 0.221 представлена на р 10

$$\omega_0 := 0.9 \cdot \omega_e \qquad \omega_r(\alpha) := \mathrm{root}\left(k_{ид}(\alpha_{кр}, m, \omega_0) - k_{и2} \cdot R \cdot 0.0075, \omega_0\right)$$

$$\Omega_3 := \omega_r(\alpha_{кр}) = 94.634$$

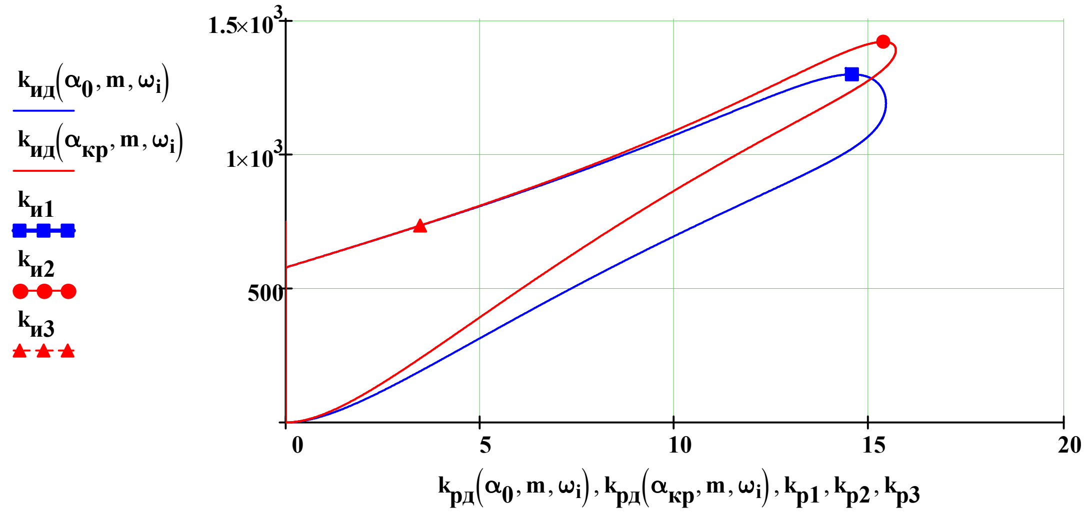
$$k_{и3} := k_{ид}(\alpha_{кр}, m, \Omega_3) = 731.781$$

$$k_{р3} := k_{рд}(\alpha_{кр}, m, \Omega_3) = 3.455$$

$$T_{и3} := \frac{k_{р3}}{k_{и3}} = 4.722 \times 10^{-3}$$

$$T_{д3} := \alpha_{кр} \cdot T_{и3} = 1.9 \times 10^{-4}$$

8 Расчёт настроек идеального ПИД-регулятора



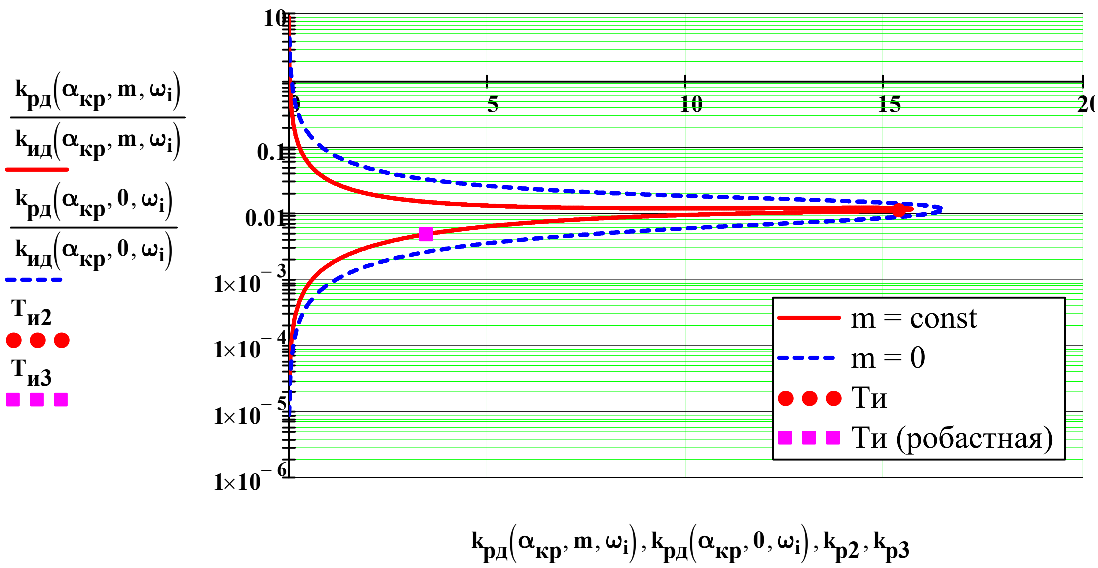


Рис. 10 - Настройка ПИД-регулятора: $k_{р1}$ - приближённая ($\alpha_0 = 0.032$); $k_{р2}$ - приближённая ($\alpha_{кр} = 0.04$); $k_{р3}$ - компромиссная робастная настройка ($\alpha_{кр} = 0.04$): **а** - зависимость коэф. интегратора от статического коэффициента; **б** - зависимость постоянной времени интегрирования статического коэффициента

9 Расчёт амплитудно-частотных характеристик замкнутой системы по каналу управляющего воздействия

Результаты расчёта позволяют оценить запас устойчивости САР по значению частотного показателя колебательности М при заданном значении m.
m = 0.477 соответствует M = 1.29;
m = 0.366 соответствует M = 1.55;
m = 0.221 соответствует M = 2.38.
В системах выше второго порядка соответствие соблюдается приближённо.
В САР с П-регулятором мера запаса устойчивости - относительный максимум АЧХ.
Амплитудно-частотные характеристики замкнутой САР с идеальным ПИД-регулятором при найденных настройках показаны на рис. 11 .
Расчёт значений резонансной частоты и максимума показателя колебательности при найденных настройках.
Резонансная частота определяется решением уравнения:

$$\omega_0 := 350 \qquad \omega_{p1} := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}\left|W_{uy}(\omega_0, k_{p1}, T_{и1}, T_{д1})\right|, \omega_0\right) = 350.79$$

$$M_1 := \frac{\left|W_{uy}(\omega_{p1}, k_{p1}, T_{и1}, T_{д1})\right|}{\left|W_{uy}(0.001, k_{p1}, T_{и1}, T_{д1})\right|} = 8.934$$

$$\omega_0 := 400 \qquad \omega_{p2} := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}\left|W_{uy}(\omega_0, k_{p2}, T_{и2}, T_{д2})\right|, \omega_0\right) = 437.531$$

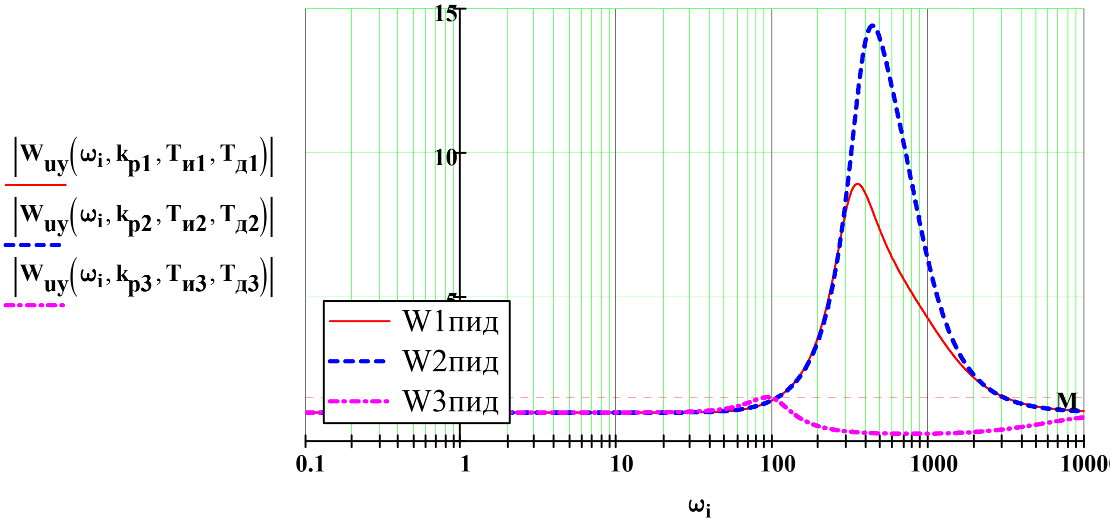
$$M_2 := \frac{\left|W_{uy}(\omega_{p2}, k_{p2}, T_{и2}, T_{д2})\right|}{\left|W_{uy}(0.001, k_{p2}, T_{и2}, T_{д2})\right|} = 14.42$$

$$\omega_0 := 80 \qquad \omega_{p3} := \mathrm{root}\left(\frac{d}{d\omega_0}\left|W_{uy}(\omega_0, k_{p3}, T_{и3}, T_{д3})\right|, \omega_0\right) = 92.032$$

$$M_3 := \frac{\left|W_{uy}(\omega_{p3}, k_{p3}, T_{и3}, T_{д3})\right|}{\left|W_{uy}(0.001, k_{p3}, T_{и3}, T_{д3})\right|} = 1.531$$

$$W_1(\omega) := W_{uy}(\omega, k_{p1}, T_{и1}, T_{д1})$$
$$W_2(\omega) := W_{uy}(\omega, k_{p2}, T_{и2}, T_{д1})$$
$$W_3(\omega) := W_{uy}(\omega, k_{p3}, T_{и3}, T_{д3})$$

9 Расчёт амплитудно-частотных характеристик замкнутой системы по каналу управляющего воздействия



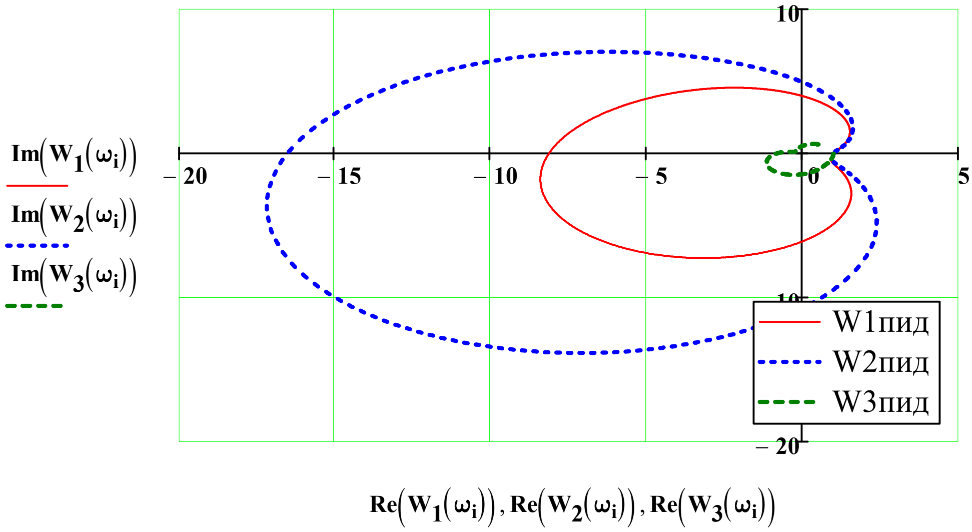


Рис. 11 - АЧХ и АФЧХ замкнутой системы при найденных настройках ПИД-регулятора: k_{p1} - приближённой ($\alpha_0 = 0.032$); k_{p2} - приближённой ($\alpha_{кр} = 0.04$); k_{p3} - компромиссной робастной ($\alpha_{кр} = 0.04$)

Показатель колебательности (заданный $M = 1.548$):

1 - $M_1 = 8.934$;

2 - $M_2 = 14.42$;

3 - $M_3 = 1.531$

Из анализа частотных характеристик видим, что робастная настройка ПИД-регулятора обеспечила требования технического задания.

10 Расчёт значений линейного и квадратичного интегральных критериев качества

Значения интегральных критериев качества в САР с ПИ-алгоритмом:

$$I_{1пи} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{пи}, T_{пи}, 0)\,dt = 1.4 \times 10^{-3} \qquad I_{2пи} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{пи}, T_{пи}, 0)^2\,dt = 1.3 \times$$

Значения интегральных критериев качества в САР с ПИД-алгоритмом:

- для $(k_и)_{max}$ и

$$I_{1пид1} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{p1}, T_{и1}, T_{д1})\,dt = 7.7 \times 10 \qquad I_{2пид1} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{p1}, T_{и1}, T_{д1})^2\,dt =$$

- для $(k_и)_{max}$ и $\alpha_{кр} = 0.04$

$$I_{1пид2} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{p2}, T_{и2}, T_{д2})\,dt = 7.1 \times 10 \qquad I_{2пид2} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{p2}, T_{и2}, T_{д2})^2\,dt =$$

- для $(k_и)_{rob}$ и $\alpha_{кр} = 0.04$

$$I_{1пид3} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{p3}, T_{и3}, T_{д3})\,dt = 1.3 \times 10 \qquad I_{2пид3} := \int_0^{t_{end}} h_p(t, k_{p3}, T_{и3}, T_{д3})^2\,dt = 1$$

10 Расчёт значений линейного и квадратичного интегральных критериев качества

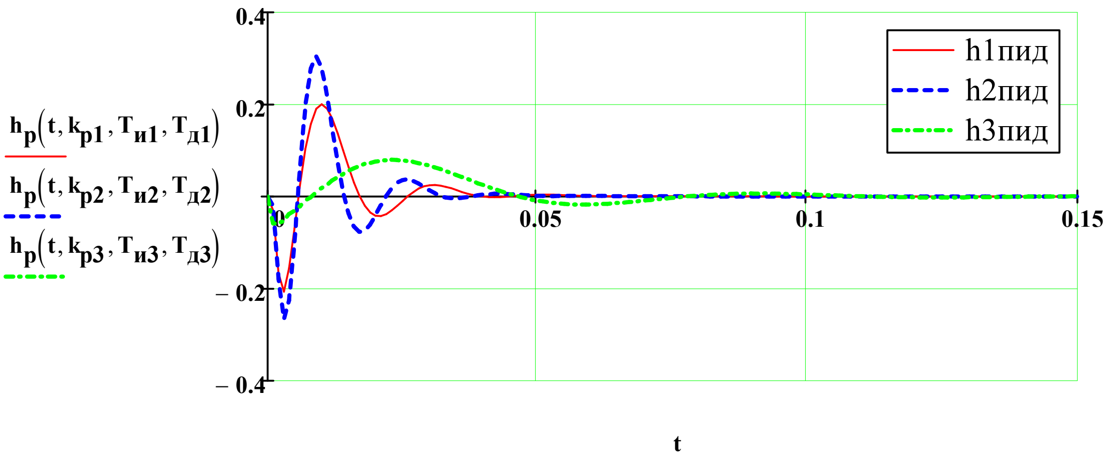


Рис. 13 - Переходные функции объектов по каналу регулирующего воздействия ПИД-регулятора: I при $\alpha_0 = 0.032$ и $(k_и)_{max}$; k_{p2} - при $\alpha_{кр} = 0.04$ и $(k_и)_{max}$; k_{p3} - при $\alpha_{кр} = 0.04$ и $(k_и)_{rob}$

Линейные и квадратичные интегральные критерии качества:

- для $(k_и)_{max}$ и $\alpha_0 = 0.032$: $I_{1пид1} = 0.00077$; $I_{2пид1} = 0.000323$;
- для $(k_и)_{max}$ и $\alpha_{кр} = 0.04$: $I_{1пид2} = 0.000707$; $I_{2пид2} = 0.000558$;
- для $(k_и)_{rob}$ и $\alpha_{кр} = 0.04$: $I_{2пид3} = 0.000131$; $I_{2пид3} = 0.000131$.

Из анализа временных характеристик общего решения видим, что наилучшими характеристика обладает ПИД-регулятор с робастной настройкой.

11 **Сравнение алгоритмов регулирования ПИ- и ПИД-**

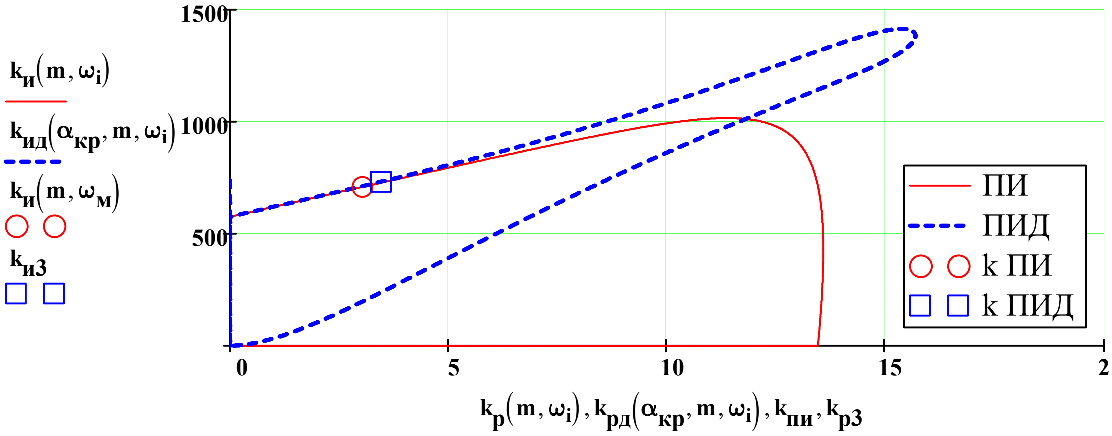


Рис. 14 - Линии m = const для САР с ПИ- и ПИД-регуляторами при $\alpha_{кр} = 0.04$

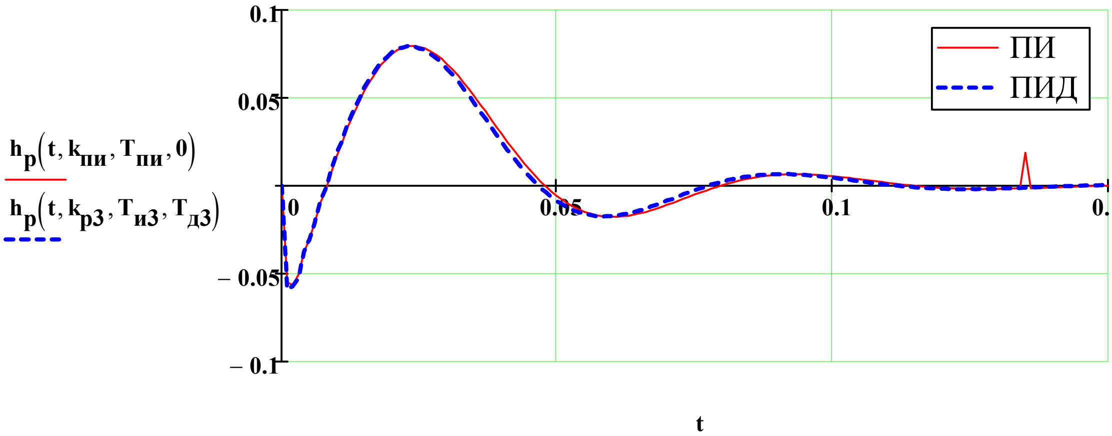


Рис. 15 - Переходные процессы с САР с ПИ- и ПИД-регуляторами ($\alpha_{кр} = 0.04$; $(k_и)_{rob}$) по каналу регулирующего воздействия

Значения интегральных критериев качества в САР с ПИ-алгоритмом:

- для $(k_и)_{max}$ и $\alpha_{кр} = 0.04$: $I_{1пи} = 0.001389$; $I_{2пи} = 0.000134$

Значения интегральных критериев качества в САР с ПИД-алгоритмом:

- для $(k_и)_{rob}$ и $\alpha_{кр} = 0.04$: $I_{1пид3} = 0.001345$; $I_{2пид3} = 0.000131$

Выигрыш в качестве при переходе от ПИ- к ПИД-регулятору:

$$\frac{I_{1пи}}{I_{1пид3}} = 1.032 \qquad \frac{I_{2пи}}{I_{2пид3}} = 1.022$$

В заключении рассмотрим структурную схему регуляруемого объекта с выбранными параметрами ПИД-регулятора (с робастной настройкой параметров).

$$W_p(s) := k_{p3}\cdot\left(1 + \frac{1}{T_{и3}\cdot s} + T_{д3}\cdot s\right)$$

Передаточная функция выбранного ПИД-регулятора

$$W_p(s)\ \text{float},4\ \rightarrow 0.0006527\cdot s + \frac{731.8}{s} + 3.455$$

$$W_{об}(s) := W_p(s)\cdot W_{об}(s)$$

Передаточная функция объекта с регулятором

$$W(s) := W_{об}(s) \left|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},3\end{matrix}\right. \rightarrow \frac{8.39e11\cdot s + -2.12e10\cdot s^2 + -8.56e7\cdot s^3 + 29600.0\cdot s^4 + 9.0\cdot s^5 + 2.32e14}{4.88e12\cdot s + 7.35e10\cdot s^2 + 5.0e8\cdot s^3 + 84420.0\cdot s^4}$$

Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции передачи объекта с регулятором

$$b := \text{numer}(W(s))\ \text{coeffs}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 2.32e14 \\ 8.39e11 \\ -2.12e10 \\ -8.56e7 \\ 29600.0 \\ 9.0 \end{pmatrix} \qquad a := \text{denom}(W(s))\ \text{coeffs}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4.88e12 \\ 7.35e10 \\ 5.0e8 \\ 84420.0 \end{pmatrix}$$

Нули и полюса функции передачи

$$zero := \text{polyroots}(b) = \begin{pmatrix} -5.072\times 10^3 \\ -220.722 \\ -110.586 \\ 103.554 \\ 2.011\times 10^3 \end{pmatrix} \qquad pole := \text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} -5.774\times 10^3 \\ -74.531 + 66.762i \\ -74.531 - 66.762i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что среди полюсов присутствует нулевой корень, следовательно характеристический полином объекта с регулятором относится к условно-устойчивым системам, находящимся на ганице устойчивости. Устойчивость в этом случае определяется параметрами колебательного (с коэффициентом затухания -74,53 $с^{-1}$ и частотой колебаний 66,76 $с^{-1}$) и апериодического (с частотой колебаний 75,987 $с^{-1}$) звеньев, составляющих систему.

Учебное издание

Озябкин Андрей Львович

МЕХАТРОНИКА, ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ CAE СИСТЕМАМИ

Печатается в авторской редакции

Технический редактор

Учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ

Подписано к печати __.__.17. Формат 60х84/19
Бумага газетная. Ризография. Усл.печ.л. ____.
Тираж ____ экз. Изд. № ____. Заказ ____.

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВО РГУПС

Адрес университета: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.