РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

А.А. Зеленина, Е.О. Лагунова, И.С. Стасюк

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебно-методическое пособие

Часть 1

Ростов-на-Дону
2015

УДК 517(07) + 06

Рецензент – кандидат технических наук, доцент Я.М. Демяненко (ЮФУ)

Зеленина, А.А.

Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебно-методическое пособие. В 2 ч. Ч. 1 / А.А. Зеленина, Е.О. Лагунова, И.С. Стасюк; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2015. – 32 с. – Библиогр.: с. 30.

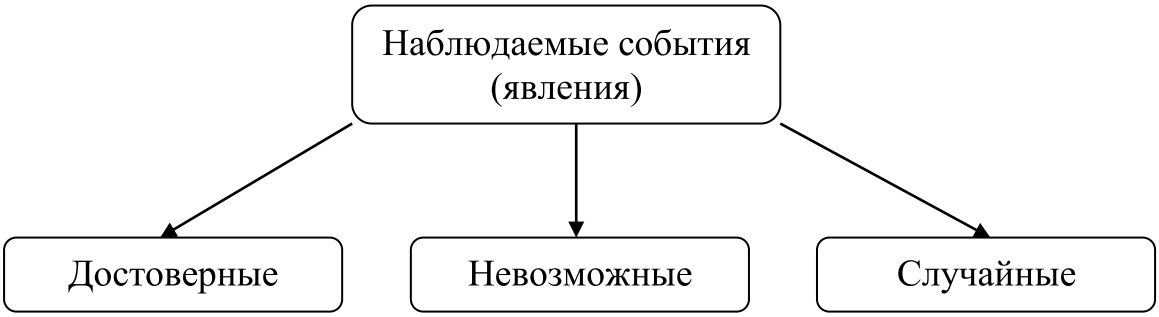
Пособие представляет собой систематическое изложение основ теории вероятностей и охватывает основные разделы, предусмотренные программой подготовки специалистов.

Помогает закрепить знания основных терминов, формул и законов, изучаемых в курсе теории вероятностей; способствует выработке у слушателей необходимых практических навыков в использовании теоретических положений при решении задач.

Предназначено для студентов первого и второго курсов очной и заочной форм обучения всех факультетов.

Одобрено к изданию кафедрой «Высшая математика».

Основные определения и понятия



Определение

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет при осуществлении определенной совокупности условий.

Определение

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении определенной совокупности условий.

Определение

Случайным называют событие, которое может как произойти, так и не произойти при осуществлении определенной совокупности условий.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита (A, B, C …).

Определение

Предметом теории вероятностей является изучение определенных закономерностей (вероятностных закономерностей), которым подчиняются массовые однородные случайные события, то есть однотипные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий.

Определение

Несовместными называют события, появление одного из которых исключает появление остальных в одном и том же испытании.

Определение

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появляется хотя бы одно из них. Если образующие полную группу события попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из них.

Определение

Два единственно возможных события, образующие полную группу, называют противоположными. Если одно из противоположных событий обозначено через A, то другое принять обозначать $\overline{A}$.

Определение

События называют равновозможными, если есть основание полагать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Определение

Элементарным исходом или элементарным событием называют каждый из возможных результатов испытания.

Определение

Благоприятствующими событию элементарными исходами называют те, в которых интересующее нас событие наступает.

Классическая вероятность

Вероятность это число, характеризующее степень возможности появления события. Существует несколько определений понятия «вероятность».

Определение

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов m к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов n, образующих полную группу:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

1) вероятность достоверного события равна единице;
2) вероятность невозможного события равна нулю;
3) вероятность случайного события – положительное число, принадлежащее интервалу $(0;1)$.

Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.

Определение

Перестановками (без повторений) называют комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся порядком их следования. Число всех перестановок:

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n;\quad 0!=1.$$

Определение

Размещениями (без повторений) называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов и отличающиеся порядком их следования или составом. Число всех размещений:

$$A_n^m=(n)_m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение

Сочетаниями (без повторений) называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов и отличающиеся хотя бы одним элементом. Число всех сочетаний:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Справедливы следующие формулы:

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ \ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\quad A_n^m = P_m \cdot C_n^n.$$

В приведенных формулах полагалось, что все n элементов различны (комбинации без повторений). Комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам.

Относительная частота. Статистическая вероятность

Определение

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний, в которых это событие появилось m к общему числу всех фактически проведенных испытаний n:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Относительную частоту в отличие от вероятности вычисляют после проведения опыта.

Относительная частота проявляет свойство устойчивости: при проведении опытов, состоящих из большого числа испытаний, в одинаковых условиях относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше число испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа, которое и является вероятностью появления события.

Определение

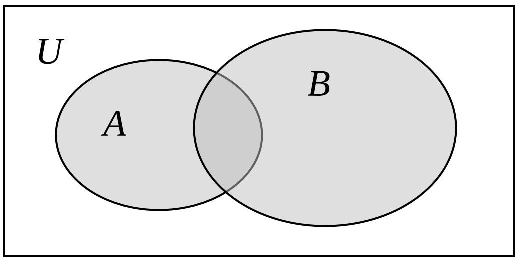
Статистической вероятностью события называют относительную частоту его появления или число, близкое к ней.

Свойство классической вероятности сохраняются и для статистической.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

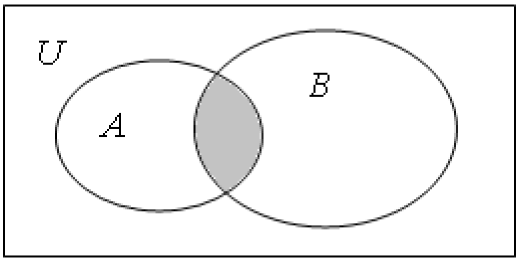
Определение

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении или события A, или события B, или обоих этих событий. Если события A и B несовместны, то $A+B$ состоит в появлении только одного из них, безразлично какого. Для иллюстрации суммы событий можно использовать диаграмму Эйлера-Венна:



Определение

Произведением AB двух событий A и B называют событие, состоящее в совместном появлении (совмещении) событий A и B. Для иллюстрации произведения событий можно использовать диаграмму Эйлера-Венна:



Определения суммы и произведения трех и более событий вводятся аналогично.

Определение

Условной вероятностью ($P_A(B)$ или $P(B|A)$) события B называют его вероятность, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Определение 1

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не меняет вероятности события B, т.е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Свойство независимости событий взаимно.

Определение

Несколько событий называют попарно независимыми, если независимы каждые два из них.

Определение

Несколько событий называют независимыми в совокупности (просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость, обратное не верно.

Теорема (сложения вероятностей несовместных событий)

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема (сложения вероятностей совместных событий)

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совмещения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема (умножения вероятностей зависимых событий)

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первой событие уже наступило:

$$P(AB)=P(BA)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Определение

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Определение 2

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий. В противном случае события зависимые.

Теорема (о сумме вероятностей событий полной группы)

Сумма вероятностей событий A_1, A_2, … A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1.$$

Теорема (о сумме вероятностей противоположных событий)

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Обозначим $p=P(A)$, $q=P(\overline{A})=1-P(A)$, тогда $p+q=1$.

Теорема (о вероятности появления хотя бы одного события)

Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, … A_n, независимых в совокупности $P(A)$, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

$$P(A)=1-P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\dots\cdot P(A_n)=1-q_1\cdot q_2\cdot\dots\cdot q_n.$$

Следствие

Если события A_1, A_2, … A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления $P(A)$ хотя бы одного из этих событий вычисляют по формуле:

$$P(A)=1-q^n,\quad q=1-p.$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса (Бейеса)

Предположим, что событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, … H_n, образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из событий полной группы наступит, их называют гипотезами. Пусть известны вероятности гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, … $P(H_n)$ и условные вероятности $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$, … $P_{H_n}(A)$ события A.

Теорема (формула полной вероятности)

Вероятность появления события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, … H_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой гипотезы на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\cdots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A).$$

Предположим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Требуется определить, как изменились в связи наступлением события A вероятности гипотез H_1, H_2, … H_n, т.е. необходимо найти условные вероятности $P_A(H_1)$, $P_A(H_2)$, … $P_A(H_n)$.

Формулы, позволяющие переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого наступило событие A, называют формулами Байеса ($i=1,2,\dots n$):

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\cdots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)}.$$

Повторение испытаний

Определение

Если производятся несколько испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов остальных, то такие испытания называют независимыми относительно события A.

Определение

Сложным будем называть событие, состоящее в совмещении нескольких отдельных простых событий.

Предположим, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна, равна p и отлична от нуля и единицы, а вероятность непоявления события также постоянна и равна $q=1-p$.

Требуется определить вероятность $P_n(k)$ появления события A в n независимых испытаниях ровно k раз (сложное событие). При определении искомой вероятности, в зависимости от значений числа испытаний n и вероятности появления события в одном испытании p, используют различные формулы теории вероятностей.

Теорема (формула Бернулли)

Вероятность $P_n(k)$ появления события A в n независимых испытаниях ровно k раз (для любых значений n и p) определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

При больших значения n и (или) малых значениях p применение точной формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям и целесообразно использовать асимптотические формулы, позволяющие находить искомые вероятности приближенно.

Теорема (локальная теорема Лапласа или Муавра-Лапласа)

Вероятность $P_n(k)$ появления события A в n независимых испытаниях ровно k раз приближенно равна (тем точнее, чем больше число испытаний n):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ табулирована для неотрицательных значений аргумента (см. прил. 1). При отрицательных значениях аргумента пользуются теми же таблицами в силу четности функции: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При $x \geq 4$ $\varphi(x)$=0.

Теорема (формула Пуассона)

Вероятность $P_n(k)$ появления события A в n независимых испытаниях ровно k раз, если вероятность p появления события в одном испытании мала ($p \leq 0{,}1$), приближенно равна (тем точнее, чем больше число испытаний n):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Теорема (интегральная теорема Лапласа)

Вероятность $P_n(k_1; k_2)$ появления события A в n независимых испытаниях от k_1-го раза до k_2-х раз приближенно равна значению определенного интеграла:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x^{/}}^{x^{//}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \text{где } x^{/} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x^{//} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ табулирована для неотрицательных значений аргумента (см. прил. 2). При отрицательных значениях аргумента пользуются теми же таблицами значений, взятыми со знаком «–» в силу нечетности функции: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $x = 0$ $\Phi(x)$ = 0, при $x \geq 5$ $\Phi(x)$ = 0,5.

При вычислении определенного интеграла, фигурирующего в интегральной теореме Лапласа, выполним ряд преобразований:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x'}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Таким образом:

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \;\; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

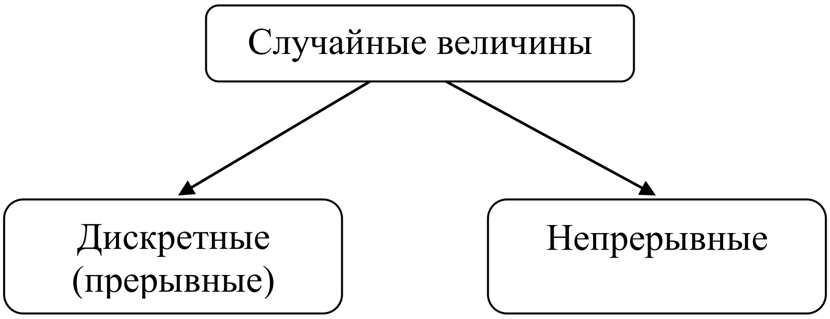
Название формулы	Формула	Применение
Формула Бернулли	$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	Точная формула для любых n и p
Локальная теорема Лапласа	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.	Приближенная формула для $p > 0{,}1$ или для $np > 9$
Формула Пуассона	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.	Приближенная формула для $p \le 0{,}1$ или для $np \le 9$

Случайные величины

Определение

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z\ldots$, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами с нижними индексами (например, возможные значения случайной величины X – $x_1, x_2, x_3\ldots$).



Определение

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число всех возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Определение

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число всех возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законы распределения вероятностей дискретных случайных величин

Определение

Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины называют соответствие между ее возможными значениями и вероятностями этих значений. Закон распределения может быть задан таблично, аналитически (в виде формулы) или графически.

При табличном задании закона распределения первая строка таблицы содержит набор возможных значений дискретной случайной величины, а вторая – соответствующие вероятности указанных возможных значений. Если число возможных значений дискретной случайной величины конечно, то закон распределения вероятностей представляет собой таблицу:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Причем сумма вероятностей возможных значений равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для наглядности закон распределения вероятностей дискретной случайной величины можно изобразить графически. Для этого в декартовой системе координат строят точки с координатами $(x_i; p_i)$ и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

К распространенным и достаточно простым распределениям вероятностей дискретных случайных величин относятся:

1) Биномиальное распределение

Определение

Биномиальным называют распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

2) Распределение Пуассона

Определение

Распределением Пуассона называют распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np$$

и выражающее закон распределения вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) случайных событий.

3) Геометрическое распределение

Предположим, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна, равна p и отлична от нуля и единицы, а вероятность непоявления события также постоянна и равна $q = 1 - p$. В качестве дискретной случайной величины X будем рассматривать число испытаний, которые необходимо провести до первого появления события A. Если событие появилось в k-м испытании, то

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p.$$

Закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	2	3	…	k	…
p	p	pq	pq^2	…	$q^{k-1} \cdot p$	…

Вероятности закона распределения образуют сходящийся ряд геометрической прогрессии с первым членом равным p и знаменателем, равным q, сумма которого равна единице.

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Определение

Две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина.

Определение

Произведением независимых случайных величин X и Y называют случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X и каждого возможного значения Y, а вероятности произведения равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

Определение

Суммой случайных величин X и Y называют случайную величину $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X и каждого возможного значения Y, а вероятности суммы для независимых случайных величин равны произведениям вероятностей возможных значений слагаемых; для зависимых случайных величин – произведению вероятности одного из слагаемых на условную вероятность другого.

Определение

Числа, описывающие случайную величину суммарно, называют ее числовыми характеристиками (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

Предположим, что закон распределения вероятностей дискретной случайной величины задан таблично:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Определение

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+\cdots+x_n\cdot p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i\ .$$

Вероятностный смысл математического ожидания заключается в том, что оно приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания

1 Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой постоянной величине:

$$M(C)=C,\quad C=\mathrm{const}.$$

2 Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X),\quad C=\mathrm{const}.$$

3 Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

4 Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Свойства 2 и 3 распространяются на произведение трех и более независимых случайных величин и сумму трех и более случайных величин соответственно.

Определение

Отклонением (центрированной случайной величиной) называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$\overset{0}{X}=X-M(X).$$

Теорема

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M\left(\overset{0}{X}\right)=M\left(X-M\left(X\right)\right)=0\,.$$

Определение

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2.$$

Теорема (формула для нахождения дисперсии)

Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожидание квадрата этой случайное величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2.$$

Свойства дисперсии

1 Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C)=0\,,\quad C=\mathrm{const}\,.$$

2 Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X),\quad C=\mathrm{const}\,.$$

3 Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Следствие 1

Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2

Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:

$$D(C+X)=D(X),\quad C=\mathrm{const}\,.$$

4 Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Определение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины, а среднее квадратическое отклонение – ту же размерность, что и случайная величина.

Числовые характеристики числа появлений события в независимых испытаниях

Предположим, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна, равна p и отлична от нуля и единицы, а вероятность непоявления события также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Теорема

Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события в n независимых испытаниях равно произведению числа этих испытаний на вероятность появления события в одном испытании. Дисперсия $D(X)$ числа появлений события в n независимых испытаниях равна произведению числа этих испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Функция распределения вероятностей случайной величины

Определение

Функцией распределения случайной величины X (интегральной функцией) называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения

1 Значения функции распределения принадлежит отрезку [0,1], то есть $0 \le F(x) \le 1$.

2 Функции распределения есть неубывающая функция.

3 Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4 Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a; \quad F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

5 Справедливы следующие предельные отношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

График функции распределении вероятностей дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывную случайную величину помимо функции распределения можно задать плотностью распределения вероятностей.

Определение

Плотностью распределения (дифференциальной функцией) непрерывной случайной величины X называют первую производную от функции распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x).$$

График плотности распределения называют кривой распределения.

Теорема

Вероятность того, что непрерывная случайная X примет значение из интервала $(a; b)$ равна определенному интегралу от плотности распределения в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема

Функцию распределения вероятностей непрерывной случайной величины X при известной плотности распределения можно найти по формуле:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz.$$

Свойства плотности распределения

1 Плотность распределения – непрерывная, неубывающая функция.

2 Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Следствие

Если все возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Предположим, что непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей и все ее возможные значения принадлежат интервалу $(a; b)$.

Определение

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Определение

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Для вычисления дисперсии используют формулу:

$$D(X)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Определение

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей числовой оси, то математическое ожидание и дисперсию находят, соответственно, по формулам:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Свойства числовых характеристик дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин

Определение

Законом распределения называют плотность вероятностей непрерывной случайной величины.

1) Равномерное распределение

Определение

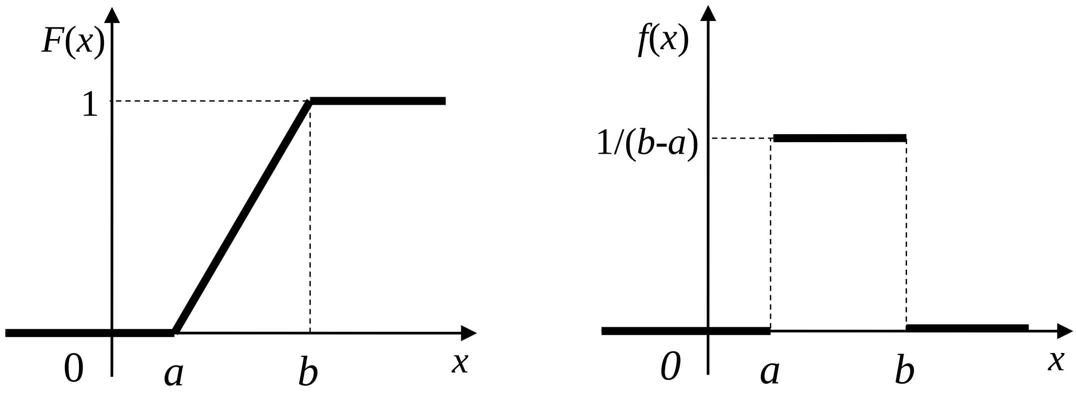
Распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале (a; b), которому принадлежат все возможные значения непрерывной случайной величины X, плотность распределения сохраняет постоянное значение, а вне этого интервала она равна нулю:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & при\ a<x\le b\\ 0, & при\ x>b\end{cases}.$$

Функция равномерного распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при\ a<x\le b\\ 1, & при\ x>b\end{cases}.$$

Построим схематично графики функции и плотности равномерного распределения:



Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ \ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\ \ \sigma(X)=\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$$

2) Нормальное распределение

Определение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами: a – математическое ожидание и σ – среднее квадратическое отклонение.

Определение

Общим называют нормальное распределение с произвольными параметрами a и $\sigma>0$. Функция общего нормального распределения имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz.$$

Определение

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами a = 0 и σ = 1. Плотность нормированного нормального распределения (табулированная функция) имеет вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция нормированного нормального распределения:

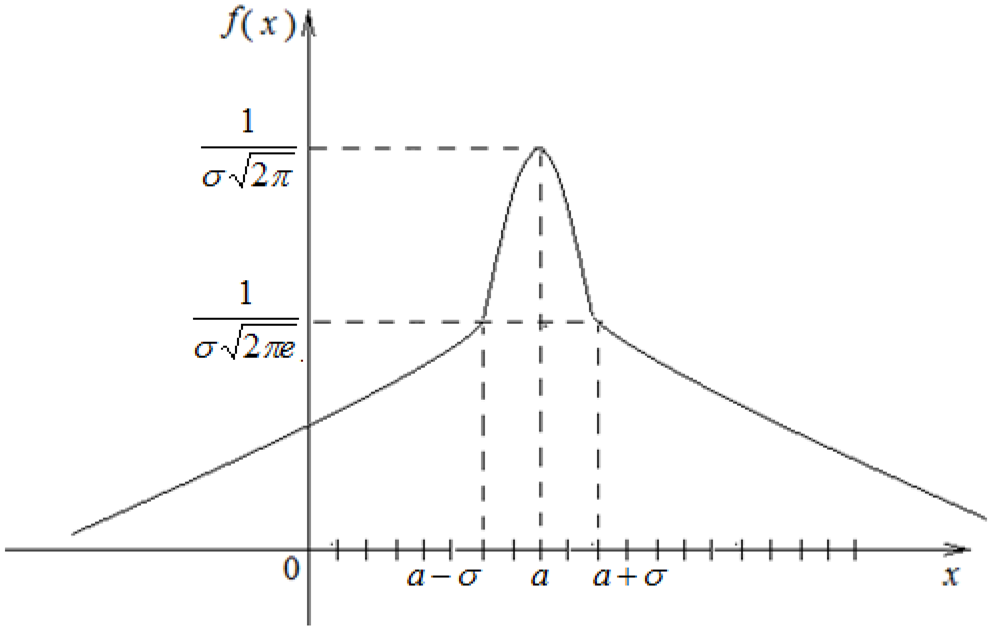
$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Можно показать, что $F(x)=F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$; $F_0(x)=0{,}5+\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Определение

График плотности нормального распределения называют нормальной кривой или кривой Гаусса.

Функция определена на всей действительной оси. Нормальная кривая расположена над осью ox, которая является горизонтальной асимптотой графика функции. График функции симметричен относительно прямой $x=a$. Точка $\left(a;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ – точка максимума графика функции; точки перегиба имеют координаты $\left(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$. Построим схематично график кривой Гаусса:



Теорема

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, определяется по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$ где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Теорема

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от своего среднего значения (математического ожидания) по абсолютной величине не превосходит заданного положительного числа ε, определяется по формуле:

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Теорема (правило трех сигм)

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения:

$$P\left(\left|X-a\right|<3\sigma\right)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973\approx 1.$$

Если на практике распределение случайной величины неизвестно, но выполняется условие, указанное в правиле трех сигм, то можно полагать, что случайная величина распределена нормально, в противном случае – нет.

3) Показательное распределение

Определение

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, плотность которого имеет вид:

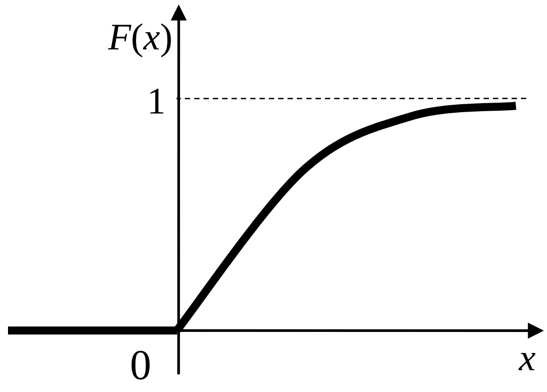
$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0\end{cases}.$$

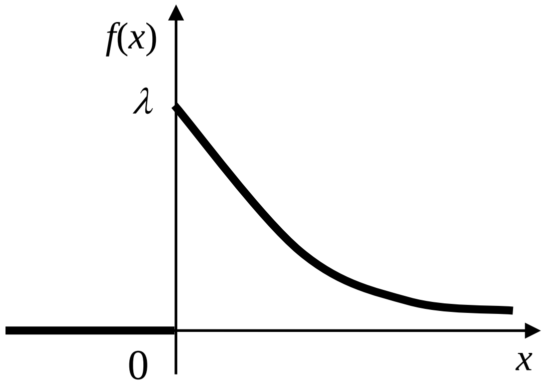
Показательное распределение характеризуется одним параметром $\lambda>0$ (постоянная величина).

Функция распределения показательного закона:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0\end{cases}.$$

Построим схематично графики функции и плотности показательного распределения:





Теорема

Вероятность того, что показательно распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется по формуле:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Числовые характеристики экспоненциального распределения:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Определение

Элементом называют некоторое устройство, не зависимо от того, «простое» оно или «сложное».

Определение

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t),$$

где непрерывная случайная величина T – длительность времени безотказной работы элемента.

Определение

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность отказов.

Характеристическое свойство показательного закона надежности: вероятность безотказной работы элемента (при заданной интенсивности отказов λ) на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого промежутка, а зависит только от длительности времени t.

Если на практике изучаемая случайная величина обладает характеристическим свойством показательного закона, то можно полагать, что случайная величина имеет экспоненциальное распределение.

Примеры решения задач

Задача 1

Бросают две кости. Какова вероятность того, что на обеих костях выпали одни и те же цифры, если известно, что сумма выпавших цифр равна восьми?

Решение:

Событие A – на обеих костях выпали одни и те же цифры и их сумма равна 8.

Используем классическое определение вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n – общее число всех равновозможных, несовместных элементарных исходов испытания.

Так как известно, что сумма выпавших цифр равна восьми, то всевозможные исходы испытания: {2,6}; {3,5}; {4,4}; {5,3} и {6,2}. Таким образом, n = 5. Благоприятствующим событию A исходом является только исход {4,4}. Таким образом, m = 1.

Согласно классическому определению вероятности,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Задача 2

По каналу связи передается 6 сообщений, каждое из которых, независимо от других, с вероятностью 0,2 является искаженным. Найти вероятность того, что не менее двух сообщений из 6 искажены.

Решение:

Событие A – не менее двух сообщений из 6 искажены. Рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ – менее двух сообщений из 6 искажены, тогда

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Используем формулу Бернулли, определяющую вероятность появления события в n независимых испытаниях ровно k раз

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

где p – вероятность появления события в одном испытании; $q = 1 – p$.
По условию задачи p = 0,2; q = 1 – 0,2 = 0,8.

Событие $\overline{A}$ заключается в том, что из 6 сообщений (n = 6) искаженными должны быть или одно (k = 1), или ни одного (k = 0) сообщения, тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(\overline{A})=P_6(0)+P_6(1)=C_6^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^6+C_6^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^5=0{,}65536.$$

Следовательно,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}65536=0{,}34464.$$

Ответ: 0,34464.

Задача 3

В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9; для хорошего – 0,7; для посредственного – 0,5. Найти вероятность того, что наудачу выбранный стрелок попадет в цель.

Решение:

Событие A – выбранный стрелок попал в цель.

Используем формулу полной вероятности.

Теорема

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Введем в рассмотрение гипотезы:

H_1 – стрелок отличный;

H_2 – стрелок хороший;

H_3 – стрелок посредственный.

Согласно условию, вероятности этих гипотез равны:

$$P(H_1) = \frac{4}{20} = 0{,}2; \quad P(H_2) = \frac{10}{20} = 0{,}5; \quad P(H_3) = \frac{6}{20} = 0{,}3.$$

Условные вероятности гипотез:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}9; \quad P_{H_2}(A) = 0{,}7; \quad P_{H_3}(A) = 0{,}5.$$

Следовательно,

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}68.$$

Ответ: 0,68.

Задача 4

Дана дискретная случайная величина X.

Требуется:

1) Составить закон распределения X.
2) Найти функцию распределения и построить ее график.
3) Определить числовые характеристики дискретной случайной величины.

В урне имеются 5 шаров с номерами от 1 до 5. Вынули два шара. Случайная величина X – сумма номеров вынутых двух шаров.

Решение:

1) Выпишем возможные значения дискретной случайной величины X:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 5; \quad x_4 = 6; \quad x_5 = 7; \quad x_6 = 8; \quad x_7 = 9.$$

Вероятности этих возможных значений, согласно классическому определению:

$$p_1 = 0{,}1; \quad p_2 = 0{,}1; \quad p_3 = 0{,}2; \quad p_4 = 0{,}2; \quad p_5 = 0{,}2; \quad p_6 = 0{,}1; \quad p_7 = 0{,}1.$$

Тогда закон распределения вероятностей имеет вид:

X	3	4	5	6	7	8	9
p	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

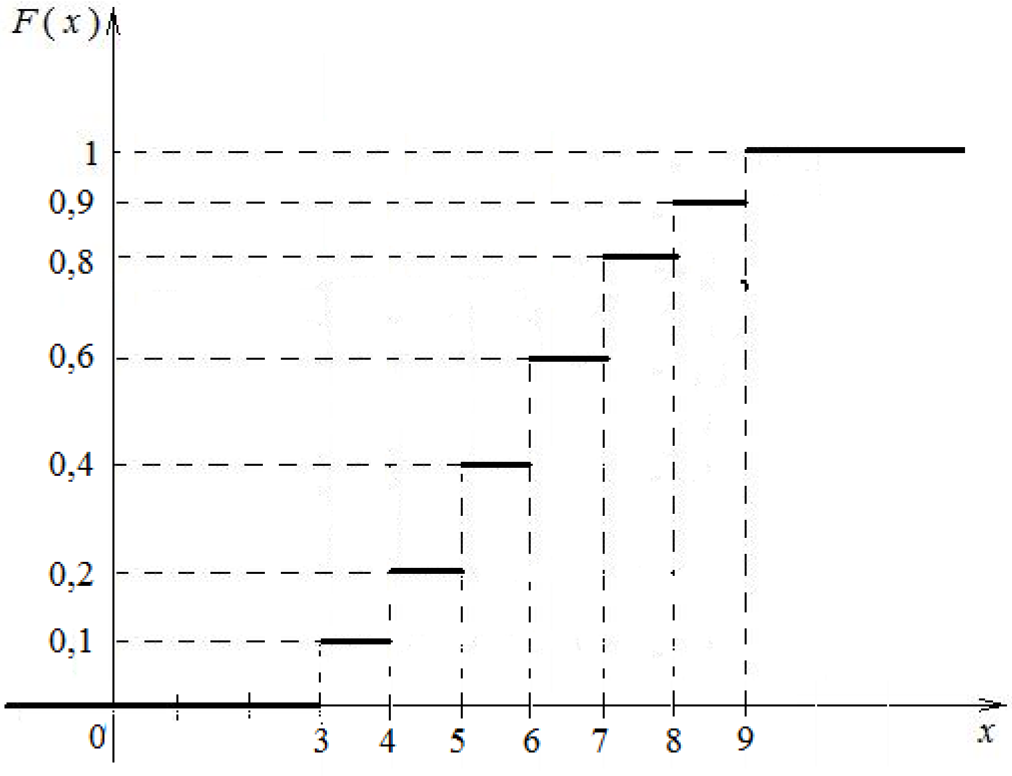
Контроль:

$$\sum_{i=1}^{7} p_i = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1.$$

2) Составим функцию распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \textit{при} \;\; x \le 3 \\ 0{,}1; & \textit{при} \; 3 < x \le 4 \\ 0{,}2; & \textit{при} \; 4 < x \le 5 \\ 0{,}4; & \textit{при} \; 5 < x \le 6 \\ 0{,}6; & \textit{при} \; 6 < x \le 7 \\ 0{,}8; & \textit{при} \; 7 < x \le 8 \\ 0{,}9; & \textit{при} \; 8 < x \le 9 \\ 1; & \textit{при} \;\; x > 9 \end{cases}.$$

Построим график функции распределения



3) Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины. Для нахождения математического ожидания используется формула:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n,$$

следовательно,

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 = 6.$$

Для нахождения дисперсии используется формула:

$$D(x) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.$$

Найдем закон распределения квадрата случайной величины и математическое ожидание величины X^2:

X^2	9	16	25	36	49	64	81
p	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

Следовательно,
$M\left(X^2\right)=9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}1+25\cdot 0{,}2+36\cdot 0{,}2+49\cdot 0{,}2+64\cdot 0{,}1+81\cdot 0{,}1=39$.
Тогда

$$D(x)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=39-6^2=3.$$

Среднее квадратическое отклонение находим по формуле:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{3}=1{,}73.$$

Задача 5

Дана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0; & при\ \ x\le 4\\ A(x-4); & при\ 4<x\le 9.\\ 1; & при\ \ x>9\end{cases}$$

Требуется:

1) Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$.
2) Определить коэффициент A.
3) Схематично построить графики функции распределения и плотности распределения.
4) Определить числовые характеристики непрерывной случайной величины.
5) Найти вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)$; $\alpha=1$, $\beta=3$.

Решение:

1) Для нахождения плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины используем формулу $f(x)=F'(x)$. Тогда

$$f(x)=\begin{cases}0; & при\ \ x\le 4\\ A; & при\ 4<x\le 9.\\ 0; & при\ \ x>9\end{cases}$$

2) Для нахождения неизвестного коэффициента A используем свойство плотности распределения вероятностей

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Тогда $\int_4^9 Adx = 1$, следовательно, $Ax\Big|_4^9 = 1$, поэтому $9A - 4A = 1$ или $5A = 1$.

Из последнего равенства следует, что $A = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

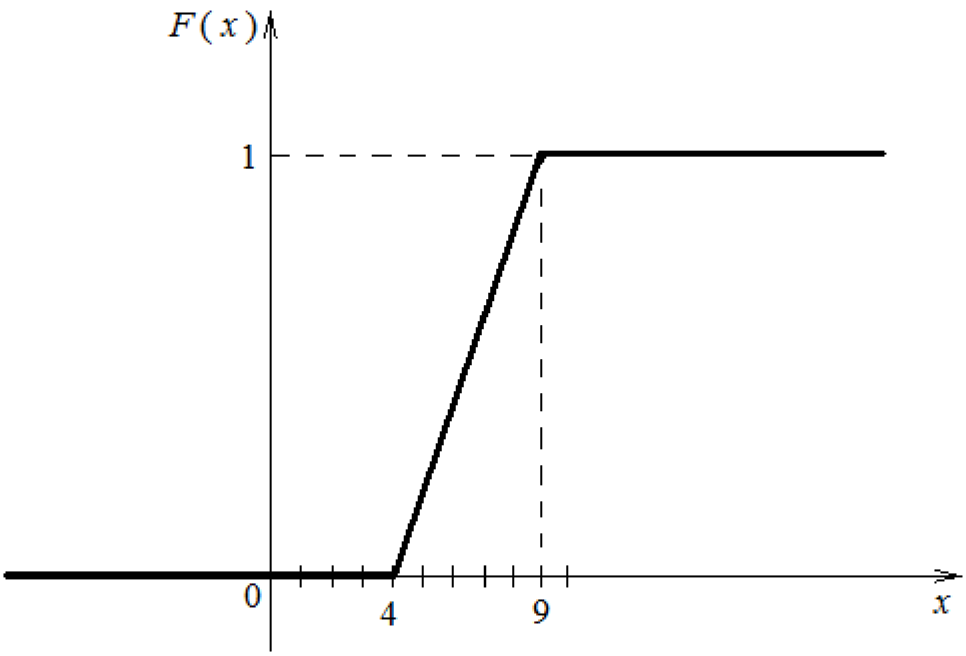
С учетом найденного коэффициента A функция распределения вероятностей принимает вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & при \ \ x \le 4 \\ 0{,}2(x-4); & при \ 4 < x \le 9. \\ 1; & при \ \ x > 9 \end{cases}$$

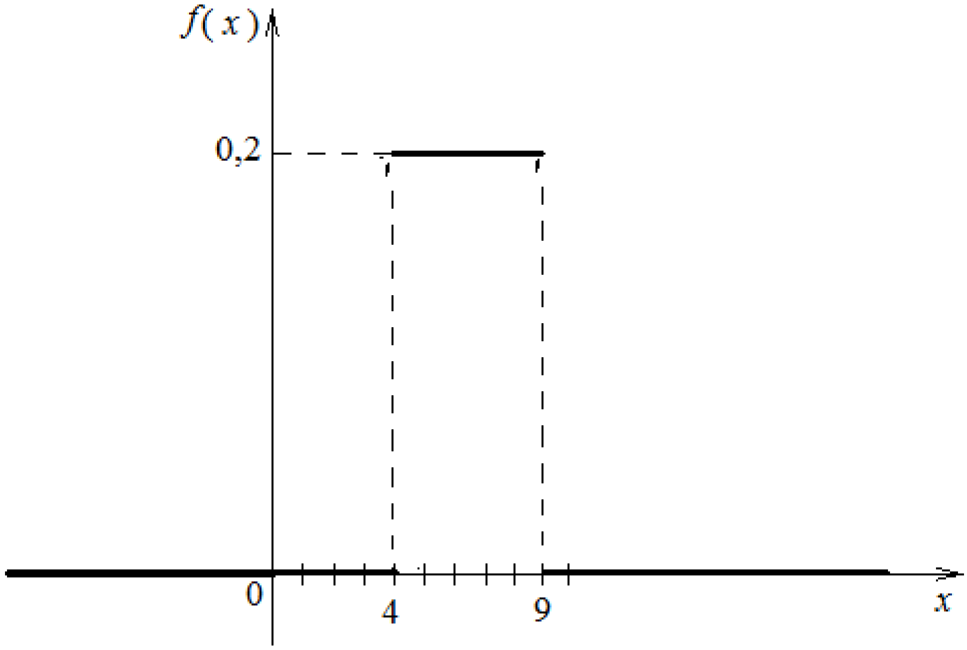
плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & при \ \ x \le 4 \\ 0{,}2; & при \ 4 < x \le 9. \\ 0; & при \ \ x > 9 \end{cases}$$

3) Схематично построим графики функции распределения вероятностей



и плотности распределения вероятностей



4) Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины. Для нахождения математического ожидания используется формула:

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx,$$

следовательно,

$$M(X)=\int_4^9 x\cdot 0{,}2dx=0{,}2\int_4^9 xdx=0{,}2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_4^9=0{,}2\left(\frac{81}{2}-\frac{16}{2}\right)=6{,}5.$$

Для нахождения дисперсии используется формула:

$$D(X)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2,$$

следовательно,

$$D(X)=\int_4^9 x^2\cdot 0{,}2dx-[6{,}5]^2=0{,}2\int_4^9 x^2dx-42{,}25=0{,}2\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_4^9-42{,}25=$$

$$=0{,}2\left(\frac{729}{2}-\frac{64}{2}\right)-42{,}25=66{,}5-42{,}25=24{,}25.$$

Среднее квадратическое отклонение находим по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{24{,}25}=4{,}9244.$$

5) Для нахождения вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ используется формула:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_1^3 0dx=0.$$

Задача 6

Дана нормально распределенная случайная величина X с параметрами a = 8 (математическое ожидание) и $\sigma = 2$ (среднее квадратическое отклонение). Требуется:

1) Найти плотность нормального распределения.

2) Схематично построить график плотности распределения вероятностей.

3) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$; $\alpha = 3$, $\beta = 11$.

4) Определить вероятность того, что X отличается от a по абсолютной величине не более чем на ε = 1.

Решение:

1) Плотность нормального распределения задается формулой

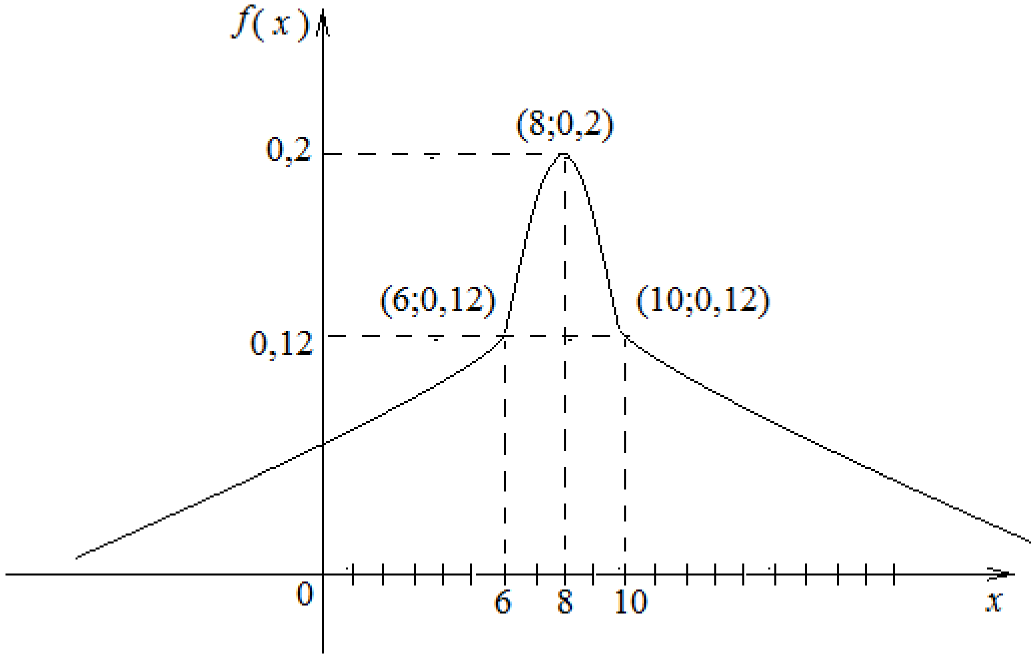
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

При a = 8 и $\sigma = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{8}}.$$

2) Функция $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{8}}$ определена на всей действительной оси x. Нормальная кривая расположена над осью абсцисс, которая служит ее горизонтальной асимптотой. График функции симметричен относительно прямой $x = a$, т.е. $x =$ 8. Точка максимума графика нормальной кривой имеет координаты $\left(a; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, т.е. $\left(8; \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)$ или $(8; 0{,}2)$. Точки перегиба графика нормальной кривой имеют координаты $\left(a-\sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a+\sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, т.е. $\left(6; \frac{1}{2\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(10; \frac{1}{2\sqrt{2\pi e}}\right)$ или $(6; 0{,}12)$ и $(10; 0{,}12)$.

Схематично построим график нормальной кривой



3) Для нахождения вероятности того, что нормальная случайная величина X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)$ используем формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой находят по таблице.

Тогда

$$P(3 < X < 11) = \Phi\left(\frac{11-8}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-8}{2}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(1{,}5) + \Phi(2{,}5) =$$

$$= 0{,}4332 + 0{,}4938 = 0{,}927.$$

4) Для определения вероятности того, что X отличается от a по абсолютной величине не более чем на ε используем формулу

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой находят по таблице.

Тогда

$$P(|X - 8| < 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 **Гмурман, В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2008.

2 **Гмурман, В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1998.

3 **Вентцель, Е.С.** Теория вероятностей: учебник для вузов / Е.С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 2002.

4 **Вентцель, Е.С.** Теория вероятностей. Задачи и упражнения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1983.

5 **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2006.

6 **Бочаров, П.П.** Теория вероятностей. Математическая статистика / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М. : Гардарика, 1998.

7 **Колемаев, В.А.** Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Колемаев, О.В. Старовертов, В.Б. Турундаевский. – М. : Высшая школа, 1991.

8 **Мхитарян, В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.С. Мхитарян, Е.В. Астафьева, Ю.Н. Миронкина, Л.И. Трошин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Зеленина Анастасия Александровна
Лагунова Елена Олеговна
Стасюк Ирина Семеновна

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Часть 1

Редактор Н.С. Федорова
Техническое редактирование и корректура Н.С. Федоровой

Подписано в печать 30.12.15. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж экз. Изд. № 93. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.