РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный университет путей сообщения»

(ФГБОУ ВПО РГУПС)

Т.В. Суворова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Учебно-методическое пособие
к лабораторным работам

Часть 1

Ростов-на-Дону
2015

УДК 539.3(06) + 07

Рецензент – доктор технических наук, профессор К.С. Ахвердиев

Суворова, Т.В.

Элементы теории упругости: учебно-методическое пособие к лабораторным работам. В 2 ч. Ч. I / Т.В. Суворова; ФГБОУ ВПО РГУПС. – Ростов н/Д, 2015. – 20 с.: ил. – Библиогр.: с. 20.

В учебно-методическом пособии приведены необходимые теоретические сведения по теории упругости, задания для выполнения лабораторных работ, примеры выполнения вариантов лабораторных работ, листинг программы, реализующей эти вычисления в интерактивной системе математики Maple.

Предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре технических специальностей РГУПС.

Одобрено к изданию кафедрой «Высшая математика».

Учебное издание

Суворова Татьяна Виссарионовна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Часть 1

Печатается в авторской редакции

Технический редактор М.А. Гончаров

Подписано в печать 06.07.15. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,16.
Тираж экз. Изд. № 50108. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВПО РГУПС

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.

Оглавление

Введение 4
Основные формулы и уравнения теории упругости 4
Лабораторная работа № 1 10
Методические указания к лабораторной работе № 1 11
Выполнение лабораторной работы № 1 с помощью системы аналитических вычислений Maple 15
Лабораторная работа № 2 18
Методические указания к выполнению лабораторной работы № 2 19
Библиографический список 20

Введение

Теория упругости – один из основных разделов механики деформируемого твёрдого тела, в котором изучается напряжённо-деформированное состояние тел при силовых и температурных воздействиях. Основы этой теории заложили математики и механики XIX века Коши, Лагранж, Навье, Пуассон, Сен-Венан, Кирхгоф, Бетти и др. Развиваемая главным образом математиками как раздел математической физики, теория упругости приобрела к 30 годам XX века практически классическую, неизменную форму, в которой позднее появились такие разделы, как теория пластичности, термоупругость, реология. В последнее время появление новых материалов, развитие ядерной физики, химии, нанотехнологий вызвало появление разделов теории упругости, изучающих поведение сред с усложненными свойствами. Разрабатываемые методы, используемые при расчётах прочности конструкций и проектировании инженерных сооружений, являются более тонкими, нежели сопромат, и позволяют решать значительно более сложные задачи.

Основные формулы и уравнения теории упругости

В общем случае, когда напряженно-деформированное состояние зависит от трёх координат x, y, z, задача теории упругости называется трёхмерной или пространственной.

Деформированное состояние упругой изотропной среды, вектор перемещений которой $\bar{u}(u,v,w)=\bar{u}(u_x,u_y,u_z)$ описывается симметричным тензором деформаций ε_{ij}:

$$T_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Последние равенства носят названия равенств Коши.

Напряженное состояние упругой изотропной среды описывается симметричным тензором напряжений:

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix};$$

Статические уравнения равновесия Навье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь и далее $\varepsilon_i = \varepsilon_{ii}$ $\sigma_i = \sigma_{ii}$, X, Y, Z – проекция массовых сил на оси координат.

На взаимно перпендикулярных площадках выполняется закон парности касательных напряжений:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}\ , \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнения совместности деформаций, или уравнения Сен-Венана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x \partial y},$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}.$$

Обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \tag{5}$$

Обратная форма обобщенного закона Гука запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \\
&\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \\
&\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, \\
&\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}, \\
&\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь E, G модуль Юнга и модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$,

θ – объемная деформация.

Из уравнений равновесия (2), обобщенного закона Гука (5) и (1) можно получить уравнения Ламе в перемещениях:

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 U + X = 0 \\
&(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\nabla^2 V + Y = 0 \\
&(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\nabla^2 W + Z = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)},$$

μ = G – параметры Ламе,

$\nabla^2 ... = \dfrac{\partial^2 ...}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 ...}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 ...}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа.

Выбирая в качестве основных неизвестных напряжения $\sigma_x, .\sigma_y, \tau_{zx}$ можно вывести группу разрешающих уравнений, носящих название Бельтрами-Митчела:

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} = 0,$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} = 0,,$$

$$(1+\nu)\nabla^2\tau_{yz}+\frac{\partial^2 I_1}{\partial y\partial z}=0,$$

$$(1+\nu)\nabla^2\tau_{zx}+\frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial z}=0$$

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z \tag{8}$$

Рассмотрим задачи теории упругости в плоской постановке, это более простая зависимость перемещений только от двух координат. При этом могут быть рассмотрены два случая: плоская деформация и обобщенное плоское деформированное состояние. Обе постановки задач сводятся к одинаковым типам разрешающих уравнений.

В случае плоской деформации перемещения всех точек тела параллельны одной плоскости, например, XoY. Вектор перемещений имеет две компоненты, отличных от нуля и зависящих от двух переменных:

$$u=u(x,y);v=v(x,y),w\equiv 0;$$

Деформации в направлении оси z отсутствуют: $\varepsilon_z=0$.

Тензор напряжений принимает вид:

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z^0\end{pmatrix}$$

Тензор деформаций:

$$T_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Из 15-и неизвестных остаётся лишь 8: $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varepsilon_x,\varepsilon_y,u,v$

Для их определения имеются 8 основных уравнений:

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0,\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Геометрические уравнения Коши:

$$\begin{gathered}\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.\end{gathered} \tag{10}$$

Условие совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Уравнения прямой формы закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_x - \nu_1 \sigma_y\right];$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_x - \nu_1 \sigma_y\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_y - \nu_1 \sigma_x\right], \qquad (11)$$

где $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$, а $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$.

Таким образом, для определения восьми неизвестных имеется группа из 8-и основных уравнений (равновесия, геометрические, физические) и дополнительных (на поверхности, совместности деформаций), причём в физические уравнения введены иные физические постоянные E1, ν1.

Рассмотрим обобщённое плоское напряжённое состояние. Плоским напряжённым состоянием называется такое состояние тела, при котором напряжения по всем элементарным площадкам, параллельным одной из координатных плоскостей, например, XoY, равны нулю $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy}$, а напряжённое состояние во всех точках, лежащих на нормали к этой плоскости одинаково. При этом все величины будут зависеть лишь от двух координат *x* и *y*.

При этом, из третьего уравнения прямой формы закона Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \varepsilon_z^0$$

Тензор напряжений имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор деформаций имеет вид:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^0 \end{pmatrix}$$

Вектор перемещений не зависит от координаты *z*.

Для определения восьми неизвестных задачи $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, u, v$, имеется 8 основных уравнений.

Все уравнения, за исключением обобщенного закона Гука, как для плоской деформации, так и плоского напряжённого состояния, абсолютно одинаковы, а уравнения закона Гука имеют одинаковый вид и различаются лишь физическими постоянными:

Плоская деформация	Плоское напряжённое состояние
$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_x - \nu_1\sigma_y\right]$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$
$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_y - \nu_1\sigma_x\right]$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right]$

Предположим, что массовые силы, имеющие проекции на оси X и Y, постоянны по объёму тела, тогда их производные равны нулю.

Пусть функция $\varphi = \varphi(x, y)$ выбирается так, что:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \qquad (12)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y};$$

Можно доказать, что дифференциальные уравнения равновесия выполняются автоматически, если функция φ удовлетворяет уравнению $\nabla^4\varphi = 0$ и является функцией бигармонической.

Подобранная таким образом функция напряжения φ является решением плоской задачи теории упругости и называется функцией напряжений Эри.

При расчете прямоугольных элементов конструкций функцию напряжений Эри удобно назначать в виде целых полиномов, а затем устанавливать, для какого вида граничных условий пригодно задаваемое решение.

Главные напряжения можно найти по формулам:

$$\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \qquad (13)$$

Угол наклона главных площадок определяется соотношением:

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (14)$$

Экстремальные касательные напряжения на площадках, параллельных оси *Oz* находятся как

$$\tau_{\max,\min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Главная площадка перпендикулярна площадке экстремальных касательных напряжений

Лабораторная работа № 1

Нахождение напряжений для консоли-балки. Использование системы аналитических преобразований Maple

Рассматривается консоль-балка (см. рис. 1) длиной m, имеющая прямоугольное сечение высотой h и толщиной 1. Данная задача является математической моделью для расчета подпорной стенки прямоугольного профиля, расчёта плотины прямоугольного профиля на гидростатическую нагрузку без учета объемных сил.

С помощью функции напряжений Эри

$$\varphi(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

данных из таблицы 1 выполнить следующие задания:

1) проверить, что предложенная функция Эри является решением бигармонического уравнения;

2) определить выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$;

3) построить эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в сечениях $x = x_0, y = y_0$;

4) найти и изобразить внешние силы, приложенные ко всем поверхностям консоли-балки;

5) проверить выполнение условий равновесия для найденных внешних сил.

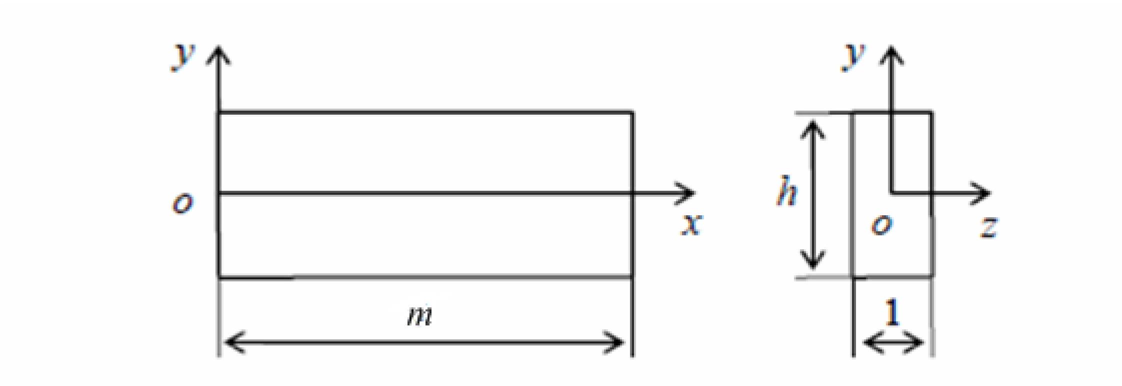


Рис. 1. Схема консоли-балки

Таблица 1

№ варианта	a	b	c	d	h	m	x_0	y_0
1	1	4	0	2	4	5	2	1
2	2	0	4	3	2	4	1	0.5
3	2	1	3	0	4	6	3	1.5
4	1	3	2	4	6	4	1	1
5	3	1	2	4	2	5	2	0.4
6	1	4	3	2	2	5	3	0.6
7	3	2	1	0	4	6	4	1.5
8	2	1	3	2	2	4	1	0.5
9	1	3	0	2	2	5	3	0.6
0	2	3	1	3	4	4	2	1.2

Методические указания к лабораторной работе № 1

Предложенная функция напряжения $\varphi(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ является решением плоской задачи теории упругости, если она удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=0. \qquad (15)$$

При этом дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях выполняются автоматически.

Выражения для напряжений через функцию Эри находятся по формулам (12), предполагается, что объёмные силы равны нулю:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y};$$

Внешние силы, приложенные к поверхности консоли с нормалью $\overline{n}$, определяются по формулам:

$$P_{xn}=\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y;$$
$$P_{yn}=\tau_{yx}n_x+\sigma_x n_y; \qquad (16)$$
$$|\overline{n}|=1, \overline{n}=(n_x,n_y)$$

$\overline{n}=(n_x,n_y)$ – направляющие косинусы единичного вектора нормали. Для проверки найденных внешних сил используются условия статического равновесия консоли-балки:

$$\sum_i X_i=0;\quad \sum_i Y_i=0;\quad \sum_i M_i=0; \qquad (17)$$

Используем в качестве функции Эри тестовый вариант:

$$a=3,\ b=4,\ c=2,\ d=5;\ m=4,\ h=2,\ x_0=2,\ y_0=0.5;$$

$$\varphi(x,y)=3x^3+4x^2y+2xy^2+5y^3.$$

1). Найдем частные производные функции Эри и подставим их в бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial\ \varphi}{\partial x}=9x^2+8xy+2y^2;\frac{\partial\ \varphi}{\partial y}=4x^2+4xy+15y^2;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(9x^2+8xy+2y^2)=18x+8y;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+4xy+15y^2)=4x+30y;$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=18;\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=0;\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=30;\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0;$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}=8;\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^2\partial x^2}=0;\Rightarrow\nabla^4\varphi=\nabla\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0.$$

Убедились, что выбранная функция Эри удовлетворяет уравнению $\nabla^4\varphi=0$ и является функцией бигармонической.

Здесь дифференциальный оператор ∇^4 является бигармоническим и имеет выражение:

$$\nabla^4_{\dots}=\frac{\partial^4\dots}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\dots}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\dots}{\partial x^4}$$

2). По заданной функции Эри найдем выражение для напряжений:

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=4x+30y,\\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=18x+8y,\\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-8x-4y.\end{cases}\qquad(18)$$

3) Построим эпюры напряжений $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ в сечениях $x=x_0=2, y=y_0=0.5$.

Положим в выражении для напряжений $x_0=2$

$$\begin{cases}\sigma_x=4x+30y,\sigma_x=8+30y,\\ \sigma_y=18x+8y,\sigma_y=36+8y,\\ \tau_{xy}=-8x-4y,\tau_{xy}=-16-2y.\end{cases}$$

По найденным выражением для напряжений при $y\in[-h/2,h/2]=[-1,1]$ и построим их эпюры:

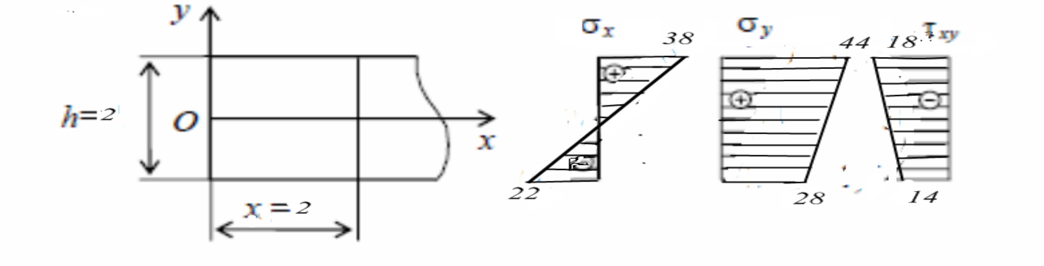


Рис. 2. Эпюры напряжения для консоли-балки

Положим в выражении для напряжений $y_0 = 0.5$

$$\begin{cases} \sigma_x = 4x + 30y, \sigma_x = 4x + 15, \\ \sigma_y = 18x + 8y, \sigma_y = 18x + 4, \\ \tau_{xy} = -8x - 4y, \tau_{xy} = -8x - 2. \end{cases}$$

По найденным выражением для напряжений при $x \in [0, m] = [0,4]$ и построим их эпюры, аналогично рис. 2.

4) Определим внешние силы, приложенные к поверхностям консоли.

Для верхней грани подставим в формулы (16), (18) значение $y = h/2 = 1$.

$$\begin{cases} \sigma_x = 4x + 30, \\ \sigma_y = 18x + 8, \\ \tau_{xy} = -8x - 4. \end{cases}$$

При этом $n_x = 0, n_y = 1$ и из формул (17) имеем:

$$P_{x1} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1;$$

$$P_{y1} = \tau_{yx} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1;$$

$$P_{x1} = -8x - 4; \;\; P_{y1} = 18x + 8.$$

Для сил P_{y1}, нормальных к верхней грани и касательных к ней сил P_{x1} строим эпюры, изменяя *x* от 0 до 4.

Для нижней грани подставим в формулы (5) значение $y = -h/2 = -1$.

$$\begin{cases} \sigma_x = 4x - 30, \\ \sigma_y = 18x - 8, \\ \tau_{xy} = -8x + 4. \end{cases}$$

При этом $n_x = 0, n_y = -1$ и из формул (17) имеем:

$$P_{x2} = \sigma_x \cdot 0 - \tau_{xy} \cdot 1;$$

$$P_{y2} = \tau_{yx} \cdot 0 - \sigma_y \cdot 1;$$

$$P_{x2} = 8x - 4; \;\; P_{y2} = -18x + 8.$$

Для сил P_{y2}, нормальных к нижней грани и касательных к ней сил P_{x2} строим эпюры, изменяя *x* от 0 до 4 .

Для левой грани подставим в формулы (18) значение $x = 0$.

$$\begin{cases} \sigma_x = 30y, \\ \sigma_y = 8y, \\ \tau_{xy} = -4y. \end{cases}$$

При этом $n_x = -1, n_y = 0$ и из формул (16) имеем:

$$P_{x3} = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{xy} \cdot 0;$$
$$P_{y3} = \tau_{yx} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0;$$
$$P_{x3} = -30y; \;\; P_{y3} = 4y.$$

Для сил P_{y3}, касательных к левой грани и нормальных к ней сил P_{x3} строим эпюры, изменяя y от -1 до 1 .

Для правой грани подставим в формулы (18) значение $x = m = 4$.

$$\begin{cases} \sigma_x = 16 + 30y, \\ \sigma_y = 72 + 8y, \\ \tau_{xy} = -32 - 4y. \end{cases}$$

При этом $n_x = 1, n_y = 0$ и из формул (3) имеем:

$$P_{x4} = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0;$$
$$P_{y4} = \tau_{yx} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0;$$
$$P_{x4} = 16 + 30y; \;\; P_{y4} = -32 - 4y.$$

Для сил P_{y4}, касательных к левой грани и нормальных к ней сил P_{x4} строим эпюры, изменяя y от -1 до 1.

5) Проверим условия равновесия консоли-балки под действием внешних сил (17):

$$\sum_i X_i = \int_0^4 (P_{x1} + P_{x2}) dx + \int_{-1}^{1} (P_{x3} + P_{x4}) dy;$$
$$\sum_i X_i = \int_0^4 (-8x - 4 + 8x - 4) dx + \int_{-1}^{1} (-30y + 16 + 30y) dy =$$
$$-8\int_0^4 dx + 16\int_{-1}^{1} dy = -32 + 32 = 0;$$
$$\sum_i Y_i = \int_0^4 (P_{y1} + P_{y2}) dx + \int_{-1}^{1} (P_{y3} + P_{y4}) dy;$$
$$\sum_i Y_i = \int_0^4 (18x + 8 - 18x + 8) dx + \int_{-1}^{1} (4y - 32 - 40y) dy =$$
$$16\int_0^4 dx - 32\int_{-1}^{1} dy = 64 - 64 = 0;$$
$$\sum_i M_i = \int_0^m ((P_{x1} - P_{x2})\frac{h}{2} - (P_{y1} + P_{y2})x) dx + \int_{-h/2}^{h/2} ((P_{x3} + P_{x4})y + P_{y3} \cdot 0 - P_{y4} \cdot m) dy;$$
$$\sum_i M_i = \int_0^4 ((-8x - 4 - 8x + 4) - (18x + 8 + -18x + 8)x) dx +$$
$$+ \int_{-1}^{1} ((-30y + 16 + 30y)y + (32 + 4y) \cdot 4) dy;$$

$$\sum_i M_i = \int_0^4 (-16x - 16x)dx + \int_{-1}^{1} (16y + 128 + 16y)dy;$$

$$\sum_i M_i = -32\int_0^4 xdx + 32\int_{-1}^{1} (y+4)dy = -32\cdot 8 - 32\cdot 4\cdot 2 = 0.$$

Вывод: предложенная функция может быть выбрана в качестве функции Эри. Уравнения равновесия выполнены.

Выполнение лабораторной работы № 1 с помощью системы аналитических вычислений Maple

Ниже приведен листинг программы, реализующей описанные выше вычисления и преобразования.

Решение плоской задачи теории упругости

```
> restart;
```

Задание функции Эри

```
> f:=(x,y)->3*x^3+4*x^2*y+2*x*y^2+5*y^3;
```

$$f := (x, y) \rightarrow 3\,x^3 + 4\,x^2\,y + 2\,x\,y^2 + 5\,y^3$$

Проверка удовлетворения функции бигармоническому уравнению

```
> d2x:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$d2x := 18\,x + 8\,y$$

```
> d2y:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$d2y := 4\,x + 30\,y$$

```
> d2xy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$d2xy := 8\,x + 4\,y$$

```
> d4x:=diff(f(x,y),x,x,x,x);
```

$$d4x := 0$$

```
> d4y:=diff(f(x,y),y,y,y,y);
```

$$d4y := 0$$

```
> d4xy:=diff(f(x,y),x,x,y,y);
```

$$d4xy := 0$$

Задание функций напряжений

```
> sigmax:=(x,y)-> 4*x+30*y;
```

$$sigmax := (x, y) \rightarrow 4\,x + 30\,y$$

```
> sigmay:=(x,y)-> 18*x+8*y;
```

$$sigmay := (x, y) \rightarrow 18\,x + 8\,y$$

```
> tauxy:=(x,y)-> -8*x-4*y;
```

$$tauxy := (x, y) \rightarrow -8\,x - 4\,y$$

Определение усилий, приложенных к внешним граням

Верхняя грань балки, следует положить $y = 1$; $n(0;1)$;

```
> m:=4;h:=1;
```

$$m := 4$$

$$h := 1$$

```
> nx:=0;ny:=1;
```

$$nx := 0$$
$$ny := 1$$

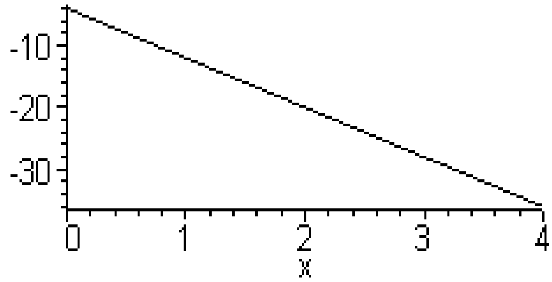
```
> Px1:=sigmax(x,h)*nx+tauxy(x,h)*ny;
```

$$Px1 := -8\,x - 4$$

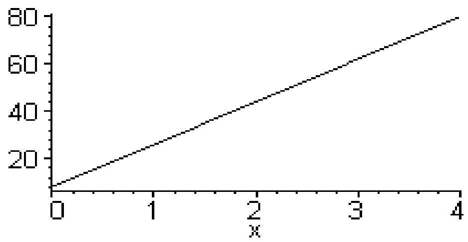
```
> Py1:=tauxy(x,h)*nx+sigmay(x,h)*ny;
```

$$Py1 := 18\,x + 8$$

```
> plot(Px1,x=0..4,colour=black);
```




```
> plot(Py1,x=0..4,colour=black);
```



Нижняя грань балки, следует положить y=-1;n(0,-1)

```
> nx:=0;ny:=-1;
```

$$nx := 0$$
$$ny := -1$$

```
> Px2:=sigmax(x,-h)*nx+tauxy(x,-h)*ny;
```

$$Px2 := 8\,x - 4$$

```
> Py2:=tauxy(x,-h)*nx+sigmay(x,-h)*ny;
```

$$Py2 := -18\,x + 8$$

Левая грань балки, следует положить x=0;n(-1,0)

```
> nx:=-1;ny:=0;
```

$$nx := -1$$
$$ny := 0$$

```
> Px3:=sigmax(0,y)*nx+tauxy(0,y)*ny;
```

$$Px3 := -30\,y$$

```
> Py3:=tauxy(0,y)*nx+sigmay(0,y)*ny;
```

$$Py3 := 4\,y$$

Правая грань балки, следует положить x=4;n(1,0)

```
> nx:=1;ny:=0;
```

$$nx := 1$$
$$ny := 0$$

```
> Px4:=sigmax(m,y)*nx+tauxy(m,y)*ny;
```

$$Px4 := 16 + 30\,y$$

```
> Py4:=tauxy(m,y)*nx+sigmay(m,y)*ny;
```

$$Py4 := -32 - 4\,y$$

Проверка выполнения условия равновесия

Проекции сил на горизонтальную ось

```
> X:=int(Px1+Px2,x=0..m)+int(Px3+Px4,y=-h..h);
```

$$X := 0$$

Проекции сил на вертикальную ось

```
> Y:=int(Py1+Py2,x=0..m)+int(Py3+Py4,y=-h..h);
```

$$Y := 0$$

Момент сил относительно начала координат

```
> Mo:=int((Px1-Px2)*h-(Py1+Py2)*x,x=0..m)+int((Px3+Px4)*y+Py1*0-Py4*m,y=-h..h);
```

$$Mo := 0$$

Лабораторная работа № 2

Исследование плоского напряженно-деформированного состояния

Упругий квадратного сечения находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (рис. 3).

Требуется найти в соответствии:

1) главные напряжения и направления главных площадок;

2) максимальные касательные напряжения;

3) относительные деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$;

4) относительное изменение объема;

5) удельную потенциальную энергию деформации.

Исходные данные вариантов представлены в таблице 2.

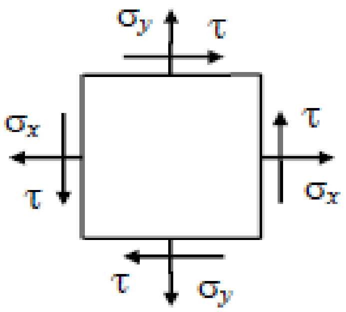


Рис. 3. Нормальное сечение бруса

Таблица 2

Исходные данные к лабораторной работе 2

№ варианта	Материал бруса	σ_x Мпа	σ_y Мпа	τ_{xy} Мпа	E Гпа	ν
1	сталь	1	4	0	200	0.25
2	алюминий	2	0	4	70	0.32
3	медь	2	1	3	110	0.3
4	сталь	1	3	2	220	0.3
5	свинец	3	1	2	18	0.4
6	бронза	1	4	3	100	0.3
7	чугун	3	2	1	120	0.3
8	бетон	2	1	3	20	0.18
9	олово	1	3	0	35	0.35
0	титан	2	3	1	120	0.25

Методические указания к выполнению лабораторной работы № 2

Исследуем напряженно-деформированное состояние медного бруса, модуль Юнга которого $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа, коэффициент Пуассона ν=0.25, σ_x=80 Мпа, σ_y=60 Мпа, τ_{xy}=-30 Мпа.

Угол наклона главных площадок определяется формулой, которая дает два взаимно перпендикулярных направления:

$$tg 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}; \quad tg 2\alpha = \frac{-60}{80-60}; \quad tg 2\alpha = -3;$$

$$2\alpha \approx -71^o; \alpha_1 \approx -35.5^o \, \alpha_2 \approx -125.5^o.$$

(Отрицательные углы отсчитываются по часовой стрелке).

Главные напряжения на площадке с углом наклона α даются равенствами:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \, .$$

Найти главные напряжения удобнее по формулам:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{mix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{80+60}{2} + \sqrt{\left(\frac{80-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} \approx 70 + 31.6 \approx 101.6,$$

$$\sigma_{\min} = \frac{80+60}{2} - \sqrt{\left(\frac{80-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} \approx 70 - 31.6 \approx 38.4$$

Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ вычислим по формулам обобщенного закона Гука:

$$\sigma_z = 0;$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right); \; \varepsilon_x = 0.5 \cdot 10^{-5}(80 - 0.25 \cdot 60) = 0.325 \cdot 10^{-3} \, (Mïà),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right); \; \varepsilon_y = 0.5 \cdot 10^{-5}(60 - 0.25 \cdot 80) = 0.2 \cdot 10^{-3} \, (Mïà),$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right); \; \varepsilon_{xy} = -0.5 \cdot 0.25 \cdot 10^{-5}(80 + 60) = -0.175 \cdot 10^{-3} \, (Mïà),$$

Здесь E – модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона (поперечной деформации).

Относительное изменение объема:

$$\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_z;$$

$$\vartheta = 0.325 \cdot 10^{-3} + 0.2 \cdot 10^{-3} - 0.175 \cdot 10^{-3} = 0.35 \cdot 10^{-3}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2E}\left(\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - 2\nu\sigma_{\max}\sigma_{\min}\right);$$

$$U = \frac{1}{2E}\left(101.6^2 + 38.4^2 - 2 \cdot 0.25 \cdot 101.6 \cdot 38.4\right) = 2.4626 \cdot 10^{-2}\,(\text{МПа}).$$

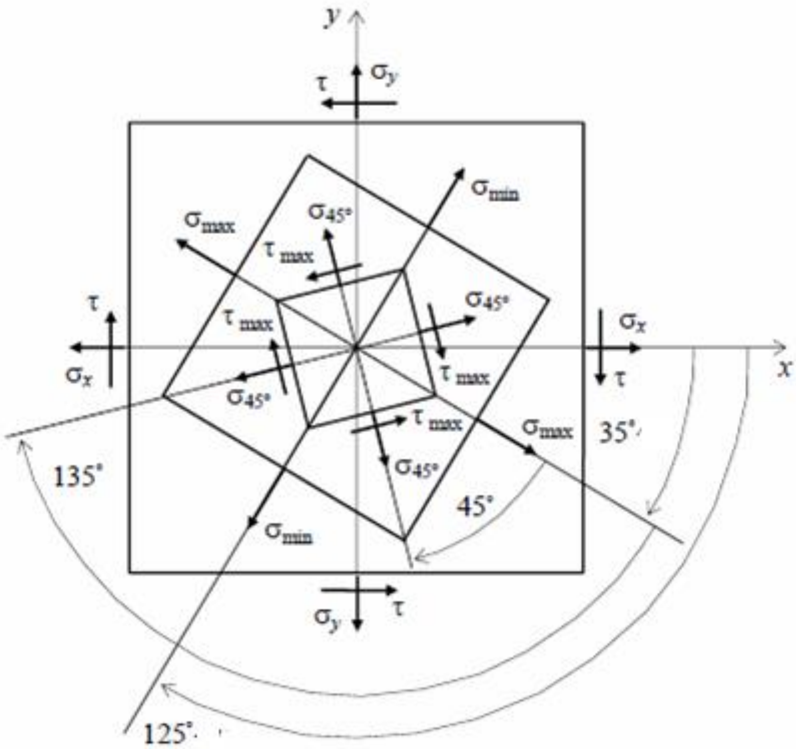


Рис. 4. Поперечное сечение упругого бруса, площадки главных напряжений, площадки экстремальных касательных напряжений

Библиографический список

1 **Александров, А.В.** Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.

2 **Васильев, В.З.** Основы и некоторые специальные задачи теории упругости : монография / В.З. Васильев. – М.: Учеб.-метод. центр по образованию на ж.-д. трансп., 2012. – 215 с.

3 **Кац, А.М.** Теория упругости : учебник для вузов / А.М. Кац. – М.: Высшая школа, 2002. – 208 с.

4 **Киселев, В.А.** Плоская задача теории упругости / В.А Киселев – М.: Высшая школа, 1976. – 151 с.

5 **Математическая энциклопедия.** Т. 3 / под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – 1183 с.